

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение . . . . .	5
Список основных обозначений . . . . .	8
<b>Глава 1. Движение твёрдого тела в атмосфере . . . . .</b>	<b>10</b>
1.1. Основные силы и моменты, действующие на тело при спуске в атмосфере . . . . .	10
1.2. Уравнения движения произвольного тела . . . . .	20
1.3. Уравнения движения тела с малой асимметрией . . . . .	28
1.4. Уравнения движения тела в форме квазиконсервативной системы с двумя степенями свободы . . . . .	33
1.5. Линеаризованные уравнения движения . . . . .	37
1.6. Влияние начальных условий на характер вращательного движения . . . . .	43
1.7. Разделение движения. Малые параметры . . . . .	49
<b>Глава 2. Невозмущённое движение . . . . .</b>	<b>52</b>
2.1. Уравнения невозмущённого движения . . . . .	53
2.2. Общие решения уравнений движения тела с синусоидальной зависимостью восстанавливающего момента от угла атаки . . . . .	66
2.3. Особенности движения тела с бигармонической характеристикой восстанавливающего момента . . . . .	72
2.4. Общее решение уравнения движения тела с бигармонической моментной характеристикой . . . . .	77
2.5. Интегралы действия . . . . .	82
<b>Глава 3. Возмущённое движение осесимметричных тел . . . . .</b>	<b>90</b>
3.1. Пространственное движение тела вращения . . . . .	90
3.2. Пространственное движение тела с моментной характеристикой близкой к синусоидальной. Приближённые решения . . . . .	98
3.3. Усреднённые уравнения движение тела с бигармонической моментной характеристикой . . . . .	106

---

<b>Глава 4. Изучение движения тел с малой асимметрией в общей постановке</b> . . . . .	109
4.1. Приведение уравнений возмущённого движения к стандартной двухчастотной системе . . . . .	109
4.2. Нерезонансный случай движения тела . . . . .	113
4.3. Виды нелинейных резонансов . . . . .	115
4.4. Частично усреднённая система. Анализ резонансных режимов . . . . .	122
4.5. Устойчивость нелинейных резонансов . . . . .	128
4.6. Устойчивость положения равновесия относительно малых возмущений . . . . .	132
4.7. Анализ влияния нелинейных резонансов на параметры движения тела при спуске в атмосфере . . . . .	139
<b>Глава 5. Идентификация вращательного движения тела по результатам измерения</b> . . . . .	144
5.1. Восстановление высокочастотного движения по малому числу измерений . . . . .	144
5.2. Идентификация вращательного движения тела на орбитальном участке полёта . . . . .	146
5.3. Идентификация вращательного движения тела при спуске в атмосфере . . . . .	150
Список литературы . . . . .	158

## Введение

Монография посвящена исследованию свободного (неуправляемого) пространственного движения твёрдого тела при спуске в атмосфере планеты.

В настоящее время в неуправляемом режиме осуществляются: доставка с орбиты ИСЗ на Землю результатов технологических экспериментов и оперативной информации о поверхности планеты; аварийный спуск управляемых спускаемых аппаратов типа «Союз»; спуск отработанных ступеней ракетносителей и их фрагментов; спуск аппаратов на поверхность других планет (Венера, Марс), обладающих атмосферой. В последние годы созданы новые типы неуправляемых спускаемых аппаратов, в том числе и малые аппараты со слабыми демпфирующими свойствами, существенно расширен спектр выполняемых ими задач, а поэтому к приближённым решениям, характеризующих их движение, предъявлены более высокие требования по точности.

Основные трудности, возникающие при исследовании свободного движения твёрдого тела в атмосфере, связаны с изучением движения относительно центра масс, которое описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Найти приближённые решения этих уравнений возможно только при использовании тех или иных допущений.

При входе тела в атмосферу с космическими скоростями характерным является высокая частота его колебаний относительно центра масс при малом изменении параметров движения центра масс на каждом периоде колебаний. Это обстоятельство создаёт предпосылки для поиска приближённых решений с использованием асимптотических методов.

Основополагающие результаты исследований о неуправляемом движении тел в атмосфере приведены в книгах: Г. С. Бюшгенса и Р. В. Студнева [20]; Ф. Р. Гантмахера и Л. М. Левина [23]; А. А. Дмитриевского, Л. Н. Лысенко и С. С. Богодистова [25]; А. В. Кострова [28]; Г. Е. Кузмака [29]; В. А. Ярошевского [43].

Полученные основные приближённые аналитические решения, как правило, справедливы при одном из следующих допущений: либо о малости пространственного угла атаки, либо о ма-

лости отношений поперечных угловых скоростей к продольной угловой скорости, либо о квазистатическом характере изменения параметров, определяющих движение тела вокруг центра масс.

При разработке неуправляемых спускаемых аппаратов, как правило, стремятся обеспечить динамическую симметрию и придать им внешнюю осесимметричную форму. Обычно возникает малая асимметрия, которая приводит к тому, что колебательное движение оси симметрии тела относительно набегающего потока и вращательное движение тела вокруг оси симметрии становятся взаимозависимыми. Если частоты указанных движений относятся как целые простые числа, то возникает резонанс. Резонансы, сохраняющиеся в течение достаточно большого промежутка времени, могут привести к значительным возмущениям параметров траектории спуска в атмосфере: увеличению амплитуды колебаний угла атаки, росту перегрузки, раскрутки аппарата вокруг его продольной оси и другим нежелательным последствиям.

Исследованию поведения систем при резонансе посвящены работы В. И. Арнольда, Н. Н. Боголюбова, Ю. А. Митропольского, В. Ф. Журавлёва, Д. М. Климова, Н. Н. Моисеева, М. М. Хапаева, Ф. Л. Черноушко, В. А. Ярошевского и других авторов.

В предлагаемой монографии рассматривается движение тела с малой асимметрией в общей нелинейной постановке при отсутствии ограничений на компоненты угловой скорости и величину пространственного угла атаки.

В гл. 1 описываются аэродинамические силы и моменты, действующие на тела при спуске в атмосфере. Приводятся различные виды уравнений движения тела с малой асимметрией, удобные для анализа движения и получения приближённых решений.

В гл. 2 рассматривается невозмущённое движение тела и получены аналитические решения, пригодные для построения приближённых решений уравнений возмущённого движения при наличии малых аэродинамических и инерционных моментов, связанных с отличием тела от идеального тела вращения, а также возмущений, обусловленных медленно меняющимися параметрами движения центра масс тела.

В гл. 3 на основе асимптотических методов получены усреднённые уравнения возмущённого движения осесимметричного тела и найдены их приближённые аналитические решения.

В гл. 4 проведён нелинейный анализ движения асимметричных тел в окрестности резонанса: исходные нелинейные уравнения движения приведены к стандартной двухчастотной форме, показана возможность существования резонансов различных порядков, исследована устойчивость резонансов.

В гл. 5 рассматривается идентификация характеристик вращательного движения и параметров тела по результатам измерений, основанная на использовании первых интегралов движения или медленно меняющихся функций, зависящих от компонентов вектора измерений.

Автор выражает искреннюю благодарность члену-корреспонденту РАН, профессору В. А. Ярошевскому и доктору физико-математических наук Л. Д. Акуленко за постоянное внимание к его исследованиям; профессору В. Л. Балакину и кандидату технических наук А. В. Дорошину за помощь в подготовке рукописи.

## Список основных обозначений

- $c_x, c_y, c_z$  — коэффициенты аэродинамических сил;  
 $c_\tau, c_n$  — коэффициенты тангенциальной и нормальной аэродинамических сил;  
 $G$  — с точностью до множителя проекция вектора кинетического момента на направление скорости;  
 $R$  — с точностью до множителя проекция вектора кинетического момента на продольную ось;  
 $\|I\|$  — тензор инерции тела;  
 $I_g$  — интеграл действия;  
 $I_x, I_y, I_z$  — осевые моменты инерции;  
 $I = \frac{I_y + I_z}{2}$  — средний поперечный момент инерции;  
 $\bar{I} = \frac{I_x}{I}$  — безразмерный момент инерции;  
 $I_{xy}, I_{xz}, I_{yz}$  — центробежные моменты инерции;  
 $\bar{I}_{xy} = \frac{I_{xy}}{I}, \bar{I}_{xz} = \frac{I_{xz}}{I}$  — безразмерные центробежные моменты инерции;  
 $\Delta_i = \frac{I_z - I_y}{I}$  — безразмерная разность поперечных моментов инерции;  
 $m$  — масса;  
 $l$  — характерный размер тела;  
 $k$  — модуль эллиптических функций;  
 $\mathbf{K}$  — вектор кинетического момента;  
 $m^\circ$  — коэффициент статического момента;  
 $m_\alpha = m^\circ + \bar{x}_T c_n$  — коэффициент восстанавливающего момента;  
 $M_\alpha = m_\alpha q S l / I$  — с точностью до множителя восстанавливающий момент;  
 $S$  — характерная площадь, например, площадь миделевого сечения;  
 $T$  — период;  
 $\bar{x}_T, \bar{y}_T, \bar{z}_T$  — безразмерные координаты центра масс тела в связанной системе координат  $OXYZ$ ;  
 $y$  — фаза колебаний угла атаки;  
 $z$  — вектор медленно меняющихся параметров;

- $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  — компоненты угловой скорости в связанной системе координат  $OXYZ$ ;
- $\alpha_{\text{пр}}(\alpha)$  — пространственный угол атаки;
- $\alpha_{\text{min}}, \alpha_{\text{max}}$  — амплитудные значения пространственного угла атаки;
- $\gamma_a(\psi)$  — угол скоростного крена (угол прецессии);
- $\alpha, \beta$  — углы атаки и скольжения;
- $\varphi_n(\varphi)$  — угол аэродинамического крена (угол собственного вращения);
- $\bar{\varphi}, \tilde{\varphi}$  — вековая и периодическая составляющие угла собственного вращения;
- $\lambda(z)$  — средняя частота собственного вращения;
- $\omega(z)$  — частота колебаний пространственного угла атаки;
- $\varepsilon$  — малый параметр;
- $t$  — время;
- $\Delta(z) = m\omega(z) - n\lambda(z)$  — частотная расстройка;
- $OXYZ$  — связанная с телом система координат;
- $Ox_ny_nz_n, Ox_vy_vz_v$  — системы координат, связанные с пространственным углом атаки;
- $\rho$  — плотность газа;
- $V$  — величина скорости;
- $H$  — высота;
- $q = \rho V^2/2$  — скоростной напор;
- $g$  — ускорение свободного падения.

## Глава 1

# ДВИЖЕНИЕ ТВЁРДОГО ТЕЛА В АТМОСФЕРЕ

В этой главе рассматриваются аэродинамические силы и моменты, действующие на тела при спуске в атмосфере, показана зависимость коэффициентов этих сил и моментов от положения тела относительно набегающего потока. Приведены различные типы уравнений движения тела относительно центра масс при спуске в атмосфере. Анализируется влияние начальных условий на границе атмосферы на характер движения тела на атмосферном участке и получено условие, при выполнении которого можно считать поступательное движение (движение центра масс) медленным по сравнению с вращательным (движение тела относительно центра масс), что позволяет воспользоваться методами теории возмущений при поиске приближённых решений.

Из всего известного многообразия форм уравнений движения и связанных с ними кинематических параметров выбраны те, которые позволяют проводить аналитические исследования. Так, при решении задачи о движении тела в линейной постановке используется система уравнений, записанная в связанных координатах. Для тел, имеющих плоскость симметрии, приводятся уравнения движения в полусвязанной системе координат. Для осесимметричных или близких к ним тел выводятся уравнения движения в координатах, связанных с пространственным углом атаки.

### 1.1. Основные силы и моменты, действующие на тело при спуске в атмосфере

На тело, находящееся в потоке воздуха или газа, действует аэродинамическая сила  $\mathbf{F}$  и аэродинамический момент  $\mathbf{M}$ . Введём в рассмотрение связанную с телом систему координат  $OXYZ$ . Направление оси  $OX$ , называемой продольной осью, выбирается, как правило, близким к расчётному направлению скорости полёта и совпадает с осью симметрии тела, если она имеет



место. В случае, когда тело обладает плоскостью симметрии, ось  $OY$ , называемая нормальной осью, лежит в этой плоскости, а ось  $OZ$ , называемая поперечной осью, перпендикулярна плоскости симметрии тела. Векторы аэродинамической силы  $\mathbf{F}$  и аэродинамического момента  $\mathbf{M}$  могут быть представлены в проекциях на оси связанной системы координат  $OXYZ$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= -X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}, \\ \mathbf{M} &= M_x\mathbf{i} + M_y\mathbf{j} + M_z\mathbf{k},\end{aligned}$$

где  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  — соответствующие единичные вектора.

Проекции этих векторов выражаются в следующем виде:

$$\begin{aligned}X &= c_x \frac{\rho V^2}{2} S, & Y &= c_y \frac{\rho V^2}{2} S, & Z &= c_z \frac{\rho V^2}{2} S, \\ M_x &= m_x \frac{\rho V^2}{2} Sl, & M_y &= m_y \frac{\rho V^2}{2} Sl, & M_z &= m_z \frac{\rho V^2}{2} Sl,\end{aligned}$$

где  $c_x, c_y, c_z$  — коэффициенты аэродинамических сил;  $m_x, m_y, m_z$  — коэффициенты аэродинамических моментов;  $\rho$  — плотность воздуха или газа;  $V$  — величина скорости полёта относительно воздуха или газа;  $l$  — характерный размер тела;  $S$  — характерная площадь, например, площадь миделевого сечения.

Коэффициенты аэродинамических сил и моментов зависят от ориентации вектора скорости относительно тела, числа Маха  $M$  ( $M = V/a$ , где  $a$  — скорость звука), числа Рейнольдса  $Re$  ( $Re = \rho V l / \mu$ , где  $\mu$  — коэффициент вязкости), безразмерных угловых скоростей  $\bar{\omega}_x = \omega_x l / V$ ,  $\bar{\omega}_y = \omega_y l / V$ ,  $\bar{\omega}_z = \omega_z l / V$  и других параметров.

Учитывая обилие факторов, от которых зависят аэродинамические коэффициенты, очень важно найти компромисс между требованиями к точности задания аэродинамических коэффициентов и требованием достаточно простой, физически обоснованной аппроксимации этих коэффициентов [43].

В задачах динамики спуска тел в атмосфере используются, как правило, два способа задания положения вектора скорости относительно тела: с помощью угла атаки  $\alpha$  и угла скольжения  $\beta$  или посредством пространственного угла атаки  $\alpha_n$  и аэродинамического угла крена  $\varphi_n$ .

Первый способ применяется при рассмотрении движения тел, имеющих плоскость симметрии, а второй — для тел, близких к осесимметричным.

Рассмотрим сначала случай, когда тело динамически симметрично и осью симметрии является ось  $OX$  связанной системы координат  $OXYZ$ . Мы рассматриваем связанную систему коор-

динат  $OXYZ$  с началом в центре масс твёрдого тела, расположенную таким образом, что центробежный момент инерции тела  $I_{yz} = 0$ , а ось  $OX$  — продольная ось тела. Наряду с системой координат  $OXYZ$  введём ещё три системы (рис. 1.1): траекторную  $OX_kY_kZ_k$ , скоростную  $OX_aY_aZ_a$  и систему координат, связанную с пространственным углом атаки,  $OX_nY_nZ_n$ . В траекторной системе координат ось  $OX_k$  совпадает с вектором скорости тела и осью  $OX_a$  при отсутствии ветра; начало координат лежит в центре масс тела, ось  $OY_k$  располагается в местной вертикальной плоскости и направлена вверх от поверхности планеты, а ось  $OZ_k$  дополняет систему до правой. Скоростная система координат  $OX_aY_aZ_a$  повернута относительно траекторной  $OX_kY_kZ_k$  вокруг оси  $OX_k$  на угол скоростного крена  $\gamma_a$ . В системе координат, связанной с пространственным углом атаки,  $OX_nY_nZ_n$  ось  $OX_n$  совпадает с продольной осью тела, ось  $OY_n$  лежит в плоскости, которая образована продольной осью и вектором скорости. Связь между траекторной системы координат  $OX_kY_kZ_k$  и связанной  $OXYZ$  осуществляется с помощью углов Эйлера: угла прецессии — угла скоростного крена  $\gamma_a$ , угла нутации — пространственного угла атаки  $\alpha_n$  и угла собственного вращения — угла аэродинамического крена  $\varphi_n$ . Взаимное расположение выбранных систем координат показано на рис. 1.1.

При движении тела в атмосфере на него действуют аэродинамические силы и моменты от набегающего потока воздуха. Все аэродинамические силы обычно приводят к равнодействующей силе, приложенной в центре давления. Так как центр давления при движении в атмосфере изменяет своё положение, то в качестве точки приложения аэродинамических сил часто используют какую-либо неподвижную относительно тела точку, добавив соответствующий аэродинамический момент. Для задания аэродинамических характеристик тел вращения или тел, близких к ним, удобно использовать систему координат  $O_1X_nY_nZ_n$ , оси которой получены параллельным переносом осей системы  $OX_nY_nZ_n$  в точку  $O_1$ , а точка  $O_1$  есть точка приложения аэродинамических сил. Для определённости будем считать, что она лежит на геометрической оси симметрии в некоторой фиксированной точке тела, например, в «носке» (рис. 1.2).

Вектор аэродинамической силы  $\mathbf{F}$ , действующей на осесимметричное тело, лежит в плоскости угла атаки  $O_1X_nY_n$  и имеет проекции на соответствующие оси в виде тангенциальной и нор-

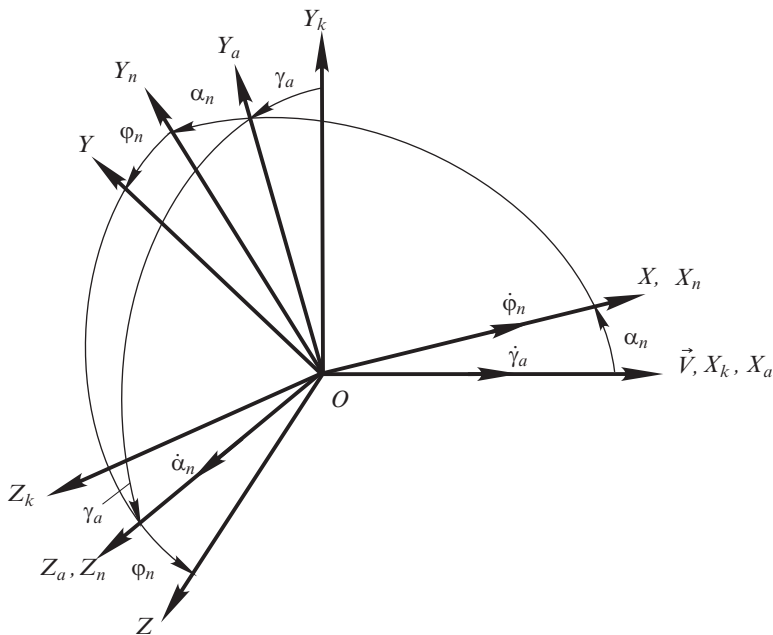


Рис. 1.1. Взаимное расположение траекторной  $OX_k Y_k Z_k$ , скоростной  $OX_a Y_a Z_a$ , связанной с пространственным углом атаки  $OX_n Y_n Z_n$  и связанной  $OXYZ$  систем координат

мальной сил

$$X_n = -c_\tau q S, \quad Y_n = c_n q S, \quad Z_n = 0,$$

где  $q = \rho V^2 / 2$  — скоростной напор;  $c_\tau, c_n$  — коэффициенты тангенциальной и нормальной аэродинамических сил, которые являются соответственно чётными и нечётными функциями пространственного угла атаки  $\alpha_n$ .

Знак коэффициента  $c_\tau$  изменён на противоположный, так как при угле атаки  $\alpha_n = 0$  тангенциальная сила направлена в сторону, противоположную оси  $O_1 X_n$ . Зависимостью коэффициентов  $c_\tau$  и  $c_n$  от безразмерных угловых скоростей, как правило, пренебрегают [43].

Главный аэродинамический момент  $\mathbf{M}$ , действующий на тело вращения, зависит в основном от пространственного угла атаки  $\alpha_n$  и безразмерных угловых скоростей  $\bar{\omega}_{xn}, \bar{\omega}_{yn}, \bar{\omega}_{zn}$ . В случае, когда угловая скорость равна нулю, на тело действует только статический аэродинамический момент  $\mathbf{M}^0$ , который перпендикулярен плоскости угла атаки, включающей вектор скорости и продольную ось тела. Очевидно, что коэффициент статического

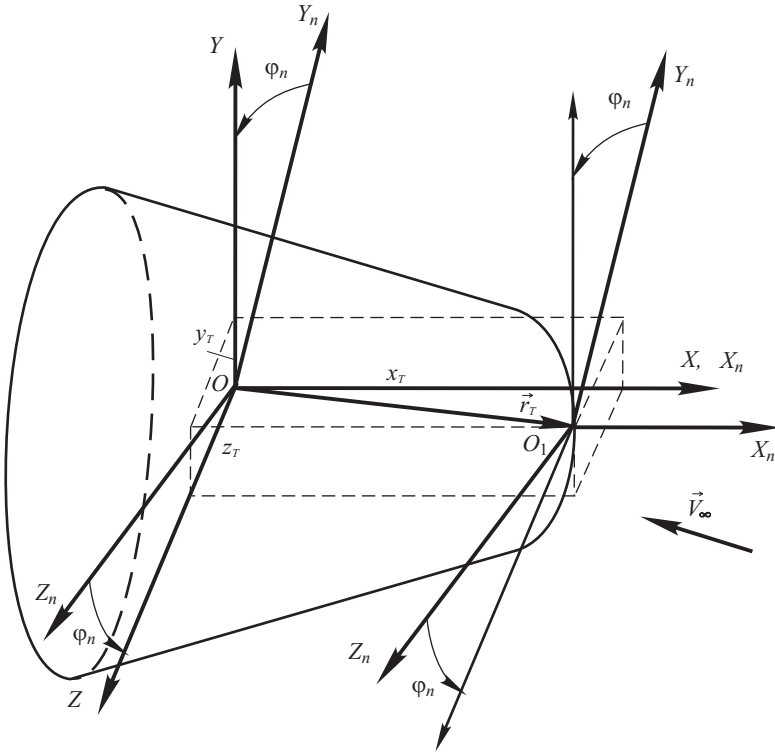


Рис. 1.2. Взаимное расположение связанной системы координат  $OXYZ$  и систем координат, связанных с пространственным углом атаки,  $OX_nY_nZ_n$  и  $O_1X_nY_nZ_n$

момента зависит от величины пространственного угла атаки:  $m^\circ = m^\circ(\alpha_n)$  и является нечётной функцией пространственного угла атаки.

Считая безразмерные угловые скорости малыми и ограничиваясь первыми членами тейлоровского разложения, представим коэффициенты аэродинамических моментов в векторном виде [43]:

$$\mathbf{m}^n(\alpha_n, \bar{\omega}) \approx \mathbf{m}^\circ(\alpha_n, 0) + \frac{\partial \mathbf{m}^n}{\partial \bar{\omega}} \cdot \bar{\omega}, \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{m}^n = (m_{xn}, m_{yn}, m_{zn})$ ,  $\bar{\omega} = (\bar{\omega}_{xn}, \bar{\omega}_{yn}, \bar{\omega}_{zn})$ ,  $\mathbf{m}^\circ(\alpha_n, 0)$  — вектор коэффициентов статического аэродинамического момента.

Главный аэродинамический момент  $\mathbf{M}$ , действующий на тело вращения, можно представить в виде трёх компонентов по осям системы координат  $O_1X_nY_nZ_n$ , связанной с пространственным

углом атаки:

$$M_{xn} = m_{xn}qSl, \quad M_{yn} = m_{yn}qSl, \quad M_{zn} = m_{zn}qSl.$$

Матрица производных аэродинамических коэффициентов по безразмерным угловым скоростям  $\partial \mathbf{m}^n / \partial \bar{\omega}$  имеет порядок  $3 \times 3$  и зависит от пространственного угла атаки  $\alpha_n$ . Из соображений симметрии очевидно, что зависимости  $m_{xn}$  и  $m_{yn}$  от  $\bar{\omega}_{zn}$ , а также  $m_{zn}$  от  $\bar{\omega}_{xn}$  и  $\bar{\omega}_{yn}$  являются чётными функциями. Поэтому четыре элемента матрицы производных равны нулю:

$$\frac{\partial m_{xn}}{\partial \bar{\omega}_{zn}} = \frac{\partial m_{yn}}{\partial \bar{\omega}_{zn}} = \frac{\partial m_{zn}}{\partial \bar{\omega}_{xn}} = \frac{\partial m_{zn}}{\partial \bar{\omega}_{yn}} = 0.$$

Зависимости производных

$$\frac{\partial m_{yn}}{\partial \bar{\omega}_{yn}}(\alpha_n) \quad \text{и} \quad \frac{\partial m_{zn}}{\partial \bar{\omega}_{zn}}(\alpha_n)$$

являются чётными функциями пространственного угла атаки  $\alpha_n$ , причём при  $\alpha_n = 0$  эти производные совпадают и равны некоторому параметру  $m^{\bar{\omega}}$ , зависящему только от чисел Маха и Рейнольдса [43].

Остальные производные, относящиеся либо к коэффициенту  $m_{xn}$ , либо к угловой скорости  $\bar{\omega}_{xn}$ , не равны нулю лишь в том случае, если учитывается влияние сил вязкости. Действительно, если эти силы пренебрежимо малы, то угловая скорость  $\bar{\omega}_{xn}$  не играет роли, так как перемещение поверхности тела относительно газа происходит только в касательном направлении. В то же время, если касательные напряжения на поверхности тела отсутствуют, то нормальные к поверхности тела вращения силы проходят через ось симметрии тела и не приводят к появлению крутящего момента  $M_{xn}$ . В том случае, когда эффектами вязкости пренебречь нельзя, производная  $\partial m_{xn} / \partial \bar{\omega}_{xn}$  является чётной функцией от  $\alpha_n$ , производные  $\partial m_{xn} / \partial \bar{\omega}_{yn}$  и  $\partial m_{yn} / \partial \bar{\omega}_{xn}$  являются нечётными функциями от  $\alpha_n$ . Производная  $\partial m_{yn} / \partial \bar{\omega}_{xn}$  фактически определяет известный эффект Магнуса [43].

С учётом сделанных замечаний запишем векторное выражение (1.1) в проекциях на оси, связанной с пространственным углом атаки системы координат  $O_1 X_n Y_n Z_n$ :

$$\begin{aligned} m_{xn} &= m_{xn}^{\bar{\omega}_x} \bar{\omega}_{xn} + m_{xn}^{\bar{\omega}_y} \bar{\omega}_{yn}, \\ m_{yn} &= m_{yn}^{\bar{\omega}_x} \bar{\omega}_{xn} + m_{yn}^{\bar{\omega}_y} \bar{\omega}_{yn}, \\ m_{zn} &= m^{\circ} + m_{zn}^{\bar{\omega}_z} \bar{\omega}_{zn}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Следует иметь в виду, что коэффициенты аэродинамических сил и моментов, действующих на тело вращения, зависят, в общем случае, от чисел Маха и Рейнольдса [31, 43].

Рассматривая коэффициенты аэродинамических сил и моментов как компоненты векторов, представим их в проекциях на оси связанной с пространственным углом атаки системы координат:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^n &= -c_x \mathbf{i}_n + c_y \mathbf{j}_n + 0 \mathbf{k}_n, \\ \mathbf{m}^n &= m_{xn} \mathbf{i}_n + m_{yn} \mathbf{j}_n + m_{zn} \mathbf{k}_n, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где  $\mathbf{i}_n, \mathbf{j}_n, \mathbf{k}_n$  — единичные векторы в системе координат  $O_1 X_n Y_n Z_n$ .

Аналогичные формулы имеют место и для связанной системы координат  $OXYZ$

$$\mathbf{c} = -c_x \mathbf{i} + c_y \mathbf{j} + c_z \mathbf{k}, \quad \mathbf{m} = m_x \mathbf{i} + m_y \mathbf{j} + m_z \mathbf{k}, \quad (1.4)$$

где  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  — единичные векторы в системе координат  $OXYZ$ .

Учитывая, что связанные оси  $OY$  и  $OZ$  повернуты относительно осей  $OY_n$  и  $OZ_n$  на угол аэродинамического крена  $\varphi_n$ , переход от системы  $O_1 X_n Y_n Z_n$  к связанной системе  $OXYZ$  осуществляется по формуле

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \|A_n^c\| \cdot \begin{bmatrix} X_n \\ Y_n \\ Z_n \end{bmatrix}, \quad (1.5)$$

где

$$\|A_n^c\| = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_n & \sin \varphi_n \\ 0 & -\sin \varphi_n & \cos \varphi_n \end{bmatrix}$$

— матрица перехода от системы  $O_1 X_n Y_n Z_n$  к связанной системе  $OXYZ$ .

Аэродинамическая асимметрия обусловлена отклонением внешней поверхности тела от идеальной осесимметричной формы, которое возникает из-за конструктивных особенностей тела, технологических погрешностей изготовления, а также из-за несимметричного обгара теплозащитной поверхности тела в процессе спуска в атмосфере. Будем задавать аэродинамическую асимметрию в связанной системе координат  $OXYZ$  в виде малых отклонений коэффициентов аэродинамических сил и моментов:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{c} &= -\Delta c_x \mathbf{i} + \Delta c_y \mathbf{j} + \Delta c_z \mathbf{k}, \\ \Delta \mathbf{m} &= \Delta m_x \mathbf{i} + \Delta m_y \mathbf{j} + \Delta m_z \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Наряду с аэродинамической введём в рассмотрение малую массовую асимметрию, которая характеризуется безразмерным смещением центра масс тела от оси симметрии тела:  $\bar{y}_T = y_T/l$ ,  $\bar{z}_T = z_T/l$ . Припишем массово-аэродинамической асимметрии порядок малости  $\varepsilon$ .

Следует учитывать, что аэродинамические силы и моменты определены для случая осесимметричных тел. Если центр масс тела смещён с оси геометрической симметрии тела, то необходимо произвести пересчёт коэффициентов аэродинамических сил и моментов.

Пусть начало системы координат  $O_1 X_n Y_n Z_n$  находится на геометрической оси симметрии в некоторой фиксированной точке тела, например в носке тела. В связанной системе координат  $OXYZ$ , начало которой лежит в центре масс тела, точка  $O_1$  определяется радиус-вектором (рис. 1.2)

$$\mathbf{r}_T = x_T \mathbf{i} + y_T \mathbf{j} + z_T \mathbf{k}.$$

При наличии малой массово-аэродинамической асимметрии коэффициенты аэродинамических сил и моментов в связанной системе координат  $OXYZ$  с учётом формул (1.3)–(1.5) определяются следующими соотношениями:

$$\mathbf{c} = A_n^c \cdot \mathbf{c}^n + \Delta \mathbf{c}, \quad \mathbf{m} = A_n^c \cdot \mathbf{m}^n + \frac{\mathbf{r}_T \times \mathbf{c}}{l}.$$

Пренебрегая членами порядка  $\varepsilon^2$  и выше, запишем эти соотношения в координатной форме отдельно для коэффициентов сил:

$$\begin{aligned} c_x &= c_\tau + \Delta c_x = c_{\tau\Sigma}, \\ c_y &= c_n \cos \varphi_n + \Delta c_y, \\ c_z &= -c_n \sin \varphi_n + \Delta c_z; \end{aligned} \tag{1.6}$$

и коэффициентов моментов:

$$\begin{aligned} m_x &= m_{xn} - (\bar{y}_T \sin \varphi_n + \bar{z}_T \cos \varphi_n) c_n + \Delta m_x, \\ m_y &= m_{yn} \cos \varphi_n + (m_{zn} + \bar{x}_T c_n) \sin \varphi_n - \bar{z}_T c_\tau - \bar{x}_T \Delta c_z + \Delta m_y, \\ m_z &= -m_{yn} \sin \varphi_n + (m_{zn} + \bar{x}_T c_n) \cos \varphi_n + \bar{y}_T c_\tau + \bar{x}_T \Delta c_y + \Delta m_z, \end{aligned} \tag{1.7}$$

где  $\bar{x}_T = x_T/l$  — безразмерное смещение центра масс тела от «носка» тела. В дальнейшем знак « $\Sigma$ » в индексе коэффициента тангенциальной силы будем опускать, имея в виду, что малая добавка  $\Delta c_x$  входит в  $c_\tau$ .

Если воспользоваться представлением (1.2) коэффициентов аэродинамического момента для тела вращения, то формулы (1.7) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned}
 m_x &= m_{x_n}^{\bar{\omega}_x} \bar{\omega}_{xn} + m_{x_n}^{\bar{\omega}_y} \bar{\omega}_{yn} - (\bar{y}_T \sin \varphi_n + \bar{z}_T \cos \varphi_n) c_n + \Delta m_x, \\
 m_y &= m_\alpha \sin \varphi_n + (m_{y_n}^{\bar{\omega}_x} \bar{\omega}_{xn} + m_{y_n}^{\bar{\omega}_y} \bar{\omega}_{yn}) \cos \varphi_n + \\
 &\quad + m_{z_n}^{\bar{\omega}_z} \bar{\omega}_{zn} \sin \varphi_n - \bar{z}_T c_\tau + \Delta m_y - \bar{x}_T \Delta c_z, \quad (1.8) \\
 m_z &= m_\alpha \cos \varphi_n - (m_{y_n}^{\bar{\omega}_x} \bar{\omega}_{xn} + m_{y_n}^{\bar{\omega}_y} \bar{\omega}_{yn}) \sin \varphi_n + \\
 &\quad + m_{z_n}^{\bar{\omega}_z} \bar{\omega}_{zn} \cos \varphi_n + \bar{y}_T c_\tau + \Delta m_z + \bar{x}_T \Delta c_y.
 \end{aligned}$$

Коэффициент в этих формулах

$$m_\alpha = (m^\circ + \bar{x}_T c_n) \quad (1.9)$$

можно представить как коэффициент восстанавливающего аэродинамического момента, действующего в плоскости пространственного угла атаки и вычисленного относительно центра масс тела.

Представляет интерес определение коэффициентов аэродинамических сил в скоростной и траекторной системах координат. Для этого целесообразно воспользоваться матрицами перехода, соответствующими последовательным поворотам на углы Эйлера. Имея в виду поворот на угол аэродинамического крена  $\varphi_n$  (1.5), два недостающих поворота представим следующим образом:

$$\begin{bmatrix} X_n \\ Y_n \\ Z_n \end{bmatrix} = \|A_n^a\| \cdot \begin{bmatrix} X_a \\ Y_a \\ Z_a \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} X_a \\ Y_a \\ Z_a \end{bmatrix} = \|A_k^a\| \cdot \begin{bmatrix} X_k \\ Y_k \\ Z_k \end{bmatrix},$$

где

$$\|A_n^a\| = \begin{bmatrix} \cos \alpha_n & \sin \alpha_n & 0 \\ -\sin \alpha_n & \cos \alpha_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

— матрица перехода от скоростной системы координат  $OX_a Y_a Z_a$  к системе  $O_1 X_n Y_n Z_n$ , связанной с пространственным углом атаки,

$$\|A_k^a\| = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma_a & \sin \gamma_a \\ 0 & -\sin \gamma_a & \cos \gamma_a \end{bmatrix}$$

— матрица перехода от траекторной системы координат  $OX_k Y_k Z_k$  к скоростной системе  $OX_a Y_a Z_a$ .



Переход от связанной системы координат  $OXYZ$  к скоростной системе  $OX_aY_aZ_a$  есть результат двух поворотов — на угол скоростного крена  $\varphi_n$  (1.5) и пространственный угол атаки  $\alpha_n$ ,

$$\|A_c^a\| = \|A_n^a\| \cdot \|A_c^n\| = \begin{bmatrix} \cos \alpha_n & -\sin \alpha_n & 0 \\ \sin \alpha_n & \cos \alpha_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_n & -\sin \varphi_n \\ 0 & \sin \varphi_n & \cos \varphi_n \end{bmatrix},$$

а переход от связанной системы координат  $OXYZ$  к траекторной  $OX_kY_kZ_k$  есть результат трёх последовательных эйлеровых поворотов,

$$\begin{aligned} \|A_c^k\| &= \|A_a^k\| \cdot \|A_n^a\| \cdot \|A_c^n\| = \|A_k^a\|^{-1} \cdot \|A_a^n\|^{-1} \cdot \|A_c^n\|^{-1} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma_a & -\sin \gamma_a \\ 0 & \sin \gamma_a & \cos \gamma_a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \alpha_n & -\sin \alpha_n & 0 \\ \sin \alpha_n & \cos \alpha_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \\ &\quad \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_n & -\sin \varphi_n \\ 0 & \sin \varphi_n & \cos \varphi_n \end{bmatrix}. \quad (1.10) \end{aligned}$$

Тогда, имея в виду формулы (1.6) для коэффициентов аэродинамической силы, записанных в связанной системе координат, можно легко получить коэффициенты аэродинамической силы в скоростной системе координат:

$$\begin{aligned} c_{xa} &= c_\tau \cos \alpha_n + c_n \sin \alpha_n + (\Delta c_y \cos \varphi_n - \Delta c_z \sin \varphi_n) \sin \alpha_n, \\ c_{ya} &= -c_\tau \sin \alpha_n + c_n \cos \alpha_n + (\Delta c_y \cos \varphi_n - \Delta c_z \sin \varphi_n) \cos \alpha_n, \\ c_{za} &= \Delta c_y \sin \varphi_n + \Delta c_z \cos \varphi_n \end{aligned}$$

и в траекторной:

$$\begin{aligned} c_{xk} &= c_{xa}, \\ c_{yk} &= c_{ya} \cos \gamma_a - c_{za} \sin \gamma_a, \\ c_{zk} &= c_{ya} \sin \gamma_a + c_{za} \cos \gamma_a. \end{aligned}$$

Перейдём к рассмотрению аэродинамического момента, действующего на тело. Будем полагать вначале, что угловая скорость тела в связанной системе координат равна нулю ( $\omega = 0$ ). Тогда статические аэродинамические коэффициенты  $m_x$ ,  $m_y$ ,  $m_z$  определяются углами атаки и скольжения, числами  $M$  и  $Re$  и, в отличие от коэффициентов аэродинамических сил, зависят от расположения центра масс.

Если центр масс тела смещён с оси симметрии, то координаты точки  $O_1$ , лежащей на оси симметрии, определяются

в связанной системе координат  $OXYZ$  радиус-вектором  $\mathbf{r}_T$ . Тогда к коэффициентам моментов добавляются слагаемые

$$(\mathbf{m})_{r_T} = \mathbf{r}_T \times \mathbf{c},$$

или в координатной форме

$$\begin{aligned} (m_x)_{r_T} &= \bar{y}_T c_z - \bar{z}_T c_y, \\ (m_y)_{r_T} &= -\bar{x}_T c_z - \bar{z}_T c_x, \\ (m_z)_{r_T} &= \bar{x}_T c_y + \bar{y}_T c_x. \end{aligned} \quad (1.11)$$

## 1.2. Уравнения движения произвольного тела

Форма уравнений движения, используемых в численных расчётах или аналитических вычислениях, во многом предопределяет возможность успешного и экономного решения задачи. Естественно, что каждому варианту постановки задачи соответствует своя, наиболее рациональная форма записи уравнений. Поэтому здесь не будет использована некая универсальная система уравнений. Так, при решении задачи о движении тела в линейной постановке удобно использовать систему уравнений, записанную в связанных координатах. При исследовании движения тела с плоскостью симметрии предпочтительнее использовать уравнения в полусвязанной системе координат, а при изучении движения осесимметричного тела при больших углах атаки удобно записать уравнения в осях, связанных с пространственным углом атаки, что облегчает применение аналитических и асимптотических методов. Наконец, для тела произвольной формы, совершающего свободное движение в атмосфере при произвольных углах атаки, наиболее экономичной, с точки зрения объёма вычислений при интегрировании, является система уравнений в направляющих косинусах, которая впервые была представлена в работе [41].

Запишем полные уравнения движения тела в общем виде:

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K} = \mathbf{M}, \quad (1.12)$$

$$\frac{d\mathbf{e}_i}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i = 0, \quad (1.13)$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{g} + \frac{\mathbf{F}}{m}, \quad (1.14)$$

где  $\mathbf{K} = \|I\| \cdot \boldsymbol{\omega}$  — кинетический момент тела,  $\|I\|$  — тензор инерции тела;  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{M}$  — векторы аэродинамических силы и момента;  $\boldsymbol{\omega}$  — вектор угловой скорости;  $\mathbf{r} = x\mathbf{l} + y\mathbf{m} + z\mathbf{n}$  — радиус-

вектор положения центра масс в инерциальной системе координат  $O_u X_u Y_u Z_u$ ;  $\mathbf{e}_i = (\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n})$  — орты инерциальной системы координат  $O_u X_u Y_u Z_u$ ;  $\mathbf{g}$  — вектор гравитационного ускорения;  $m$  — масса тела.

Уравнение (1.12) отражает теорему об изменении кинетического момента тела, записанную в связанной с телом системе координат  $OXYZ$ . Уравнение (1.13) устанавливает связь между инерциальной системой координат и связанной, а уравнение (1.14) описывает движение центра масс тела в инерциальной системе координат.

Пусть начало координат системы  $O_u X_u Y_u Z_u$  находится в центре Земли, ось  $O_u Z_u$  совпадает с осью вращения Земли и направлена к северному полюсу, а ось  $O_u X_u$  — в точку весеннего равноденствия (рис. 1.3). Представим вектор абсолютной скорости центра масс тела  $\mathbf{V}_u$  в виде следующей суммы:

$$\mathbf{V}_u = \mathbf{V} + \mathbf{W} + \boldsymbol{\Omega}_3 \times \mathbf{r}. \quad (1.15)$$

Здесь  $\mathbf{V}$  — скорость тела относительно воздуха (воздушная скорость);  $\mathbf{W}(u, \theta, v)$  — скорость ветра, задаваемая, как правило, в нормальной земной системе координат  $O X_g Y_g Z_g$  в виде широтной и меридиональной составляющих;  $\boldsymbol{\Omega}_3$  — вектор угловой скорости Земли:

$$\boldsymbol{\Omega}_3 = \Omega \mathbf{l} + \Theta \mathbf{m} + \Omega_3 \mathbf{n}.$$

В силу равенства (1.15) можно записать формулы для проекций вектора воздушной скорости в геоцентрической системе координат  $O_u X_u Y_u Z_u$  и её модуля, необходимого для вычисления аэродинамических сил и моментов

$$\begin{aligned} V_{xr} &= V_{xu} + \Omega_3 y + v \sin \varphi \cos \lambda + u \sin \lambda, \\ V_{yr} &= V_{yu} - \Omega_3 x + v \sin \varphi \sin \lambda - u \cos \lambda, \\ V_{zr} &= V_{zu} - v \cos \varphi, \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$V = \sqrt{V_{xr}^2 + V_{yr}^2 + V_{zr}^2},$$

где  $\lambda$  — долгота,  $\varphi$  — широта.

Уравнение (1.14) в проекциях на оси инерциальной геоцентрической системы координат запишется в виде

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{xu} \\ \dot{V}_{yu} \\ \dot{V}_{zu} \end{bmatrix} = \frac{\|A_c^u\|}{m} \cdot \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_{xu} \\ g_{yu} \\ g_{zu} \end{bmatrix} = V_{xu}, \quad \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{xu} \\ V_{yu} \\ V_{zu} \end{bmatrix},$$

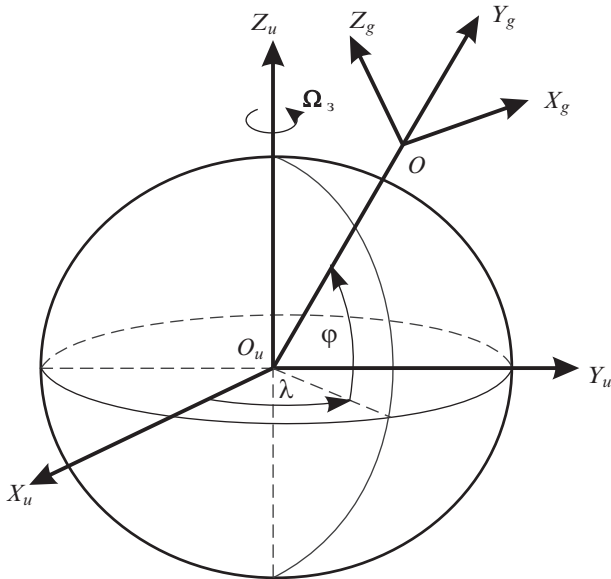


Рис. 1.3. Взаимное расположение геоцентрической и нормальной систем координат

где  $V_{xu}$ ,  $V_{yu}$ ,  $V_{zu}$  — проекции абсолютной скорости тела на оси инерциальной системы координат;  $g_{xu}$ ,  $g_{yu}$ ,  $g_{zu}$  — проекции вектора гравитационного ускорения на те же оси;  $\|A_c^u\|$  — матрица направляющих косинусов:

$$\|A_c^u\| = \begin{bmatrix} l_x & l_y & l_z \\ m_x & m_y & m_z \\ n_x & n_y & n_z \end{bmatrix}. \quad (1.17)$$

Орты инерциальной системы координат в проекциях на оси связанной системы координат  $OXYZ$  определяются с помощью матрицы (1.17):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{l} \\ \mathbf{m} \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} = \|A_c^u\| \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix}.$$

Три векторных кинематических дифференциальных уравнения для направляющих косинусов (1.13) могут быть заменены на девять скалярных дифференциальных уравнений. Однако следует учитывать, что только три направляющих косинуса из девяти являются независимыми (как и три независимых угла Эйлера), а остальные шесть могут быть определены из условий ортогональности инерциальной системы координат. Так, скалярное

произведение единичных векторов  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{m}$  и  $\mathbf{n}$  самих на себя и попарное их скалярное произведение даёт шесть алгебраических соотношений вида

$$\begin{aligned}(\mathbf{l} \cdot \mathbf{l}) &= 1, & (\mathbf{m} \cdot \mathbf{m}) &= 1, & (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) &= 1, \\ (\mathbf{l} \cdot \mathbf{m}) &= 0, & (\mathbf{l} \cdot \mathbf{n}) &= 0, & (\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}) &= 0.\end{aligned}$$

С другой стороны, в силу условий ортогональности указанные орты связаны и тремя векторными произведениями

$$\mathbf{n} = \mathbf{l} \times \mathbf{m}, \quad \mathbf{m} = \mathbf{n} \times \mathbf{l}, \quad \mathbf{l} = \mathbf{m} \times \mathbf{n}.$$

Следовательно, направляющие косинусы связывают девять дифференциальных и пятнадцать алгебраических уравнений. С точки зрения объёма вычислений и однозначной трактовки результата, как правило, используют шесть дифференциальных и три алгебраических уравнения, получаемых из следующих трёх векторных уравнений:

$$\dot{\mathbf{l}} = \mathbf{l} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\mathbf{m}} = \mathbf{m} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\mathbf{n}} = \mathbf{n} \times \boldsymbol{\omega}.$$

Перейдём к построению последней группы уравнений — динамических уравнений вращательного движения тела. Имея в виду, что эллипсоид инерции тела не изменяется в процессе движения, разрешим уравнение (1.12) относительно производной абсолютной угловой скорости по времени

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \|\mathbf{I}\|^{-1} (\mathbf{M} + (\|\mathbf{I}\| \cdot \boldsymbol{\omega}) \times \boldsymbol{\omega}). \quad (1.18)$$

Здесь  $\|\mathbf{I}\|^{-1}$  — обращённый тензор инерции, определяемый следующей матрицей:

$$\|\mathbf{I}\|^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} I_y I_z - I_{yz}^2 & I_z I_{xy} + I_{yz} I_{xz} & I_y I_{xz} + I_{xy} I_{yz} \\ I_z I_{xy} + I_{yz} I_{xz} & I_x I_z - I_{xz}^2 & I_x I_{yz} + I_{xy} I_{xz} \\ I_y I_{xz} + I_{xy} I_{yz} & I_x I_{yz} + I_{xy} I_{xz} & I_x I_y - I_{xy}^2 \end{bmatrix},$$

где  $\Delta = I_x I_y I_z - 2I_{xy} I_{xz} I_{yz} - I_x I_{yz}^2 - I_y I_{xz}^2 - I_z I_{xy}^2$ .

Векторное уравнение (1.18) можно представить в проекциях на связанные оси координат:

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} = \|\mathbf{I}\|^{-1} \cdot \begin{bmatrix} M_x^\Sigma \\ M_y^\Sigma \\ M_z^\Sigma \end{bmatrix}, \quad (1.19)$$

где

$$M_x^\Sigma = M_x + (I_y - I_z)\omega_y\omega_z + I_{xz}\omega_x\omega_y - I_{xy}\omega_x\omega_z + I_{yz}(\omega_y^2 - \omega_z^2),$$

$$M_y^\Sigma = M_y + (I_z - I_x)\omega_x\omega_z + I_{xy}\omega_y\omega_z - I_{yz}\omega_x\omega_y + I_{xz}(\omega_z^2 - \omega_x^2),$$

$$M_z^\Sigma = M_z + (I_x - I_y)\omega_x\omega_y + I_{yz}\omega_x\omega_z - I_{xz}\omega_y\omega_z + I_{xy}(\omega_x^2 - \omega_y^2).$$

После того как выписана полная система уравнений движения твёрдого тела в атмосфере, как в векторном, так и в скалярном виде, следует привести формулы для параметров движения, требуемых при определении аэродинамических характеристик тела.

Так, для вычисления демпфирующих моментов необходимо знание проекций вектора угловой скорости тела относительно воздуха на связанные оси, а результатом интегрирования динамических уравнений вращательного движения (1.19) является вектор абсолютной угловой скорости или его проекции на связанные оси. Между абсолютной и относительной угловыми скоростями существует связь:

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_r + \boldsymbol{\Omega}_3,$$

где  $\boldsymbol{\omega}_r$  — угловая скорость тела относительно воздушного потока.

Проекции относительной угловой скорости тела на связанные оси имеют вид

$$\omega_{xr} = \omega_x - \Omega_3 n_x, \quad \omega_{yr} = \omega_y - \Omega_3 n_y, \quad \omega_{zr} = \omega_z - \Omega_3 n_z.$$

Для нахождения углов, определяющих ориентацию вектора скорости относительно тела, следует первоначально вычислить проекции этой скорости на связанные оси, что нетрудно сделать, имея вектор воздушной скорости, заданный в проекциях на инерциальные оси (1.16):

$$\begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} = \|A_u^c\| \cdot \begin{bmatrix} V_{xr} \\ V_{yr} \\ V_{zr} \end{bmatrix}.$$

Матрицу  $\|A_u^c\|$  можно получить с помощью матрицы направляющих косинусов:

$$\begin{aligned} \|A_u^c\| &= \|A_c^u\|^{-1} = \\ &= \frac{1}{\Delta_u^c} \begin{vmatrix} m_y n_z - m_z n_y & -l_y n_z + l_z n_y & l_y m_z - l_z m_y \\ -m_x n_z + m_z n_x & l_x n_z - l_z n_x & -l_x m_z + l_z m_x \\ m_x n_y - m_y n_x & -l_x n_y + l_y n_x & l_x m_y - l_y m_x \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

где

$$\Delta_u^c = l_x m_y n_z - l_x m_z n_y - l_y m_x n_z + l_z m_x n_y + l_y m_z n_x - l_z m_y n_x.$$

В зависимости от формы задания аэродинамических характеристик, вектор скорости  $\mathbf{V} = V_x \mathbf{i} + V_y \mathbf{j} + V_z \mathbf{k}$  относительно тела определяется двумя парами углов: пространственным углом атаки  $\alpha_n$  и углом скоростного крена  $\varphi_n$  (рис. 1.1), или плоским углом атаки  $\alpha$  и углом скольжения  $\beta$  (рис. 1.4).

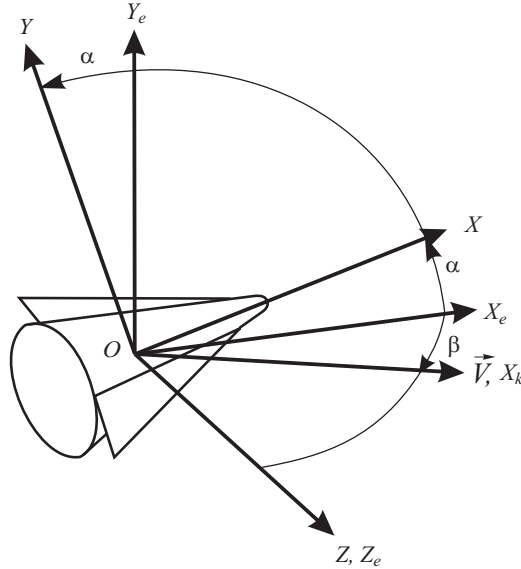


Рис. 1.4. Взаимное расположение связанной и полусвязанной систем координат

Расчётные формулы для этих углов имеют вид

$$\begin{aligned} \sin \alpha_n &= \frac{\sqrt{V_y^2 + V_z^2}}{V}, & \cos \alpha_n &= \frac{V_x}{V}, \\ \sin \varphi_n &= \frac{V_z}{\sqrt{V_y^2 + V_z^2}}, & \cos \varphi_n &= -\frac{V_y}{\sqrt{V_y^2 + V_z^2}}, \\ \sin \alpha &= -\frac{V_y}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2}}, & \cos \alpha &= \frac{V_x}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2}}, \\ \sin \beta &= \frac{V_z}{V}, & \cos \beta &= \frac{\sqrt{V_x^2 + V_y^2}}{V}, \end{aligned}$$

где  $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$  — модуль воздушной скорости.

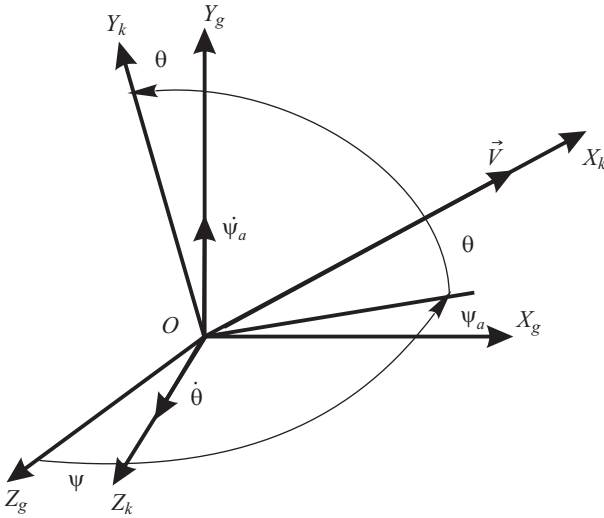


Рис. 1.5. Взаимное расположение траекторной и нормальной систем координат

В ряде случаев имеет смысл упростить полные уравнения движения тела, для этого введём некоторые несущественные, с точки зрения анализа вращательного движения, допущения. В задачах о спуске в атмосферу Земли неуправляемых летательных аппаратов баллистического или полубаллистического типа можно полагать, что дальность и продолжительность атмосферного участка невелики по сравнению с орбитальным участком, в связи с чем Землю можно рассматривать как невращающийся шар с центральным полем притяжения. Если не ставится специальной задачи, то, как правило, ветровые возмущения также не учитываются. При указанных допущениях для описания поступательного движения тела целесообразно воспользоваться траекторной  $Ox_k, Oy_k, Oz_k$  и нормальной  $Ox_g, Oy_g, Oz_g$  системами координат (рис. 1.5), связь между которыми осуществляется с помощью двух углов: угла наклона траектории  $\vartheta$  и угла курса  $\psi_a$ . Уравнения движения центра масс тела можно представить в виде [1]

$$\dot{V} = -c_{xa}q \frac{S}{m} - g \sin \vartheta,$$

$$\dot{\vartheta} = -\frac{1}{V} \left[ (c_{ya} \cos \gamma_a - c_{za} \sin \gamma_a) q \frac{S}{m} - \left( g - \frac{V^2}{r} \right) \cos \vartheta \right],$$



$$\begin{aligned}
V\dot{\psi}_a \cos \vartheta = & \\
= - \left[ (c_{ya} \sin \gamma_a + c_{za} \cos \gamma_a) \frac{qS}{m} - \frac{V^2}{r} \cos \vartheta \cos (\psi_a - \psi_{a0}) \operatorname{tg} \varkappa_6 \right], \\
\dot{\varkappa}_n = \frac{\dot{L}_n}{r} = \frac{V}{r} \cos \vartheta \cos (\psi_a - \psi_{a0}), & \quad (1.20) \\
\dot{\varkappa}_6 = \frac{\dot{L}_6}{r} = \frac{V}{r} \cos \vartheta \sin (\psi_a - \psi_{a0}), \\
\dot{H} = V \sin \vartheta,
\end{aligned}$$

где  $r$  — расстояние до притягивающего центра,  $\varkappa_n$ ,  $\varkappa_6$  — соответственно продольная и боковая угловые дальности;  $L_6$ ,  $L_n$  — продольная и боковая дальности;  $\psi_{a0}$  — начальное значение угла курса.

Динамические уравнения вращательного движения (1.19) следует дополнить тремя кинематическими уравнениями. Будем рассматривать три системы координат: нормальную  $OX_g Y_g Z_g$ , траекторную  $OX_k Y_k Z_k$  и связанную  $OXYZ$  (рис. 1.1 и рис. 1.5). Траекторная система вращается относительно нормальной с угловой скоростью

$$\omega_{xk} = \dot{\psi}_k \sin \vartheta, \quad \omega_{yk} = \dot{\psi}_k \cos \vartheta, \quad \omega_{zk} = \dot{\vartheta},$$

найдем проекции этих составляющих, а также угловых скоростей  $\dot{\alpha}_n$ ,  $\dot{\varphi}$  и  $\dot{\gamma}_a$  на связанные оси с использованием матрицы перехода  $\|A_k^c\|$ , которую можно найти как

$$\|A_k^c\| = \|A_n^c\| \cdot \|A_a^n\| \cdot \|A_k^a\|,$$

$$\begin{aligned}
\omega_x = \dot{\gamma}_a \cos \alpha_n + \dot{\varphi}_n + \dot{\psi}_a (\sin \vartheta \cos \alpha_n + \cos \vartheta \sin \alpha_n \cos \gamma_a) + \\
+ \dot{\vartheta} \sin \alpha_n \sin \gamma_a,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega_y = - \left( \dot{\gamma}_a + \dot{\psi}_a \sin \vartheta \right) \sin \alpha_n \cos \varphi_n + \\
+ \dot{\psi}_a \cos \vartheta (\cos \alpha_n \cos \varphi_n \cos \gamma_a - \sin \varphi_n \sin \gamma_a) + \\
+ \dot{\vartheta} (\cos \alpha_n \cos \varphi_n \sin \gamma_a + \sin \varphi_n \cos \gamma_a) + \dot{\alpha}_n \sin \varphi_n,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega_z = \left( \dot{\gamma}_a + \dot{\psi}_a \sin \vartheta \right) \sin \alpha_n \sin \varphi_n - \dot{\psi}_a \cos \vartheta (\cos \alpha_n \sin \varphi_n \cos \gamma_a + \\
+ \cos \varphi_n \sin \gamma_a) + \dot{\vartheta} (\cos \varphi_n \cos \gamma_a - \cos \alpha_n \sin \varphi_n \sin \gamma_a) + \\
+ \dot{\alpha}_n \cos \varphi_n.
\end{aligned}$$

Подставим в эти формулы уравнения для  $\dot{\vartheta}$  и  $\dot{\psi}$  из системы (1.20), при этом для больших скоростей полёта будем пренебрегать неаэродинамическими силами и окончательно запишем

$$\begin{aligned}\omega_x &= \dot{\gamma}_a \cos \alpha_n + \dot{\varphi}_n - (\lambda_y \sin \varphi_n + \lambda_z \cos \varphi_n) \cdot \sin \alpha_n, \\ \omega_y &= (\dot{\alpha}_n + \lambda_a) \sin \varphi_n - \dot{\gamma}_a \sin \alpha_n \cos \varphi_n - \lambda_z \cos \alpha_n, \\ \omega_z &= (\dot{\alpha}_n + \lambda_a) \cos \varphi_n + \dot{\gamma}_a \sin \alpha_n \sin \varphi_n + \lambda_y \cos \alpha_n,\end{aligned}\quad (1.21)$$

где

$$\lambda_a = \frac{c_{ya} q S}{m V}, \quad \lambda_y = \frac{\Delta c_{y} q S}{m V}, \quad \lambda_z = \frac{\Delta c_{z} q S}{m V}.$$

Разрешим кинематические уравнения (1.21) относительно первых производных эйлеровых углов

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_n &= \omega_y \sin \varphi_n + \omega_z \cos \varphi_n - \lambda_a + (-\lambda_y \cos \varphi_n + \lambda_z \sin \varphi_n) \times \\ &\quad \times \cos \alpha_n, \\ \dot{\gamma}_a &= \frac{-\omega_y \cos \varphi_n + \omega_z \sin \varphi_n}{\sin \alpha_n} - (\lambda_y \sin \varphi_n + \lambda_z \cos \varphi_n) \operatorname{ctg} \alpha_n, \\ \dot{\varphi}_n &= \omega_x - \dot{\gamma}_a \cos \alpha_n + (\lambda_y \sin \varphi_n + \lambda_z \cos \varphi_n) \cdot \sin \alpha_n.\end{aligned}\quad (1.22)$$

Таким образом шесть уравнений движения центра масс (1.20) и шесть уравнений движения относительно центра масс (1.19) и (1.22) составляют полную систему дифференциальных уравнений движения неуправляемого тела при спуске в атмосфере.

### 1.3. Уравнения движения тела с малой асимметрией

Уравнения движения тела в атмосфере (1.19)–(1.22) являются достаточно сложными для проведения каких-либо аналитических исследований и поиска решений, поэтому для частного в некотором смысле случая целесообразно построить новую систему уравнений. Тела, предназначенные для спуска в атмосферу с орбиты искусственного спутника планеты, как правило, являются осесимметричными. Из-за конструктивных особенностей, технологических погрешностей при изготовлении и неравномерного обгара теплозащитного покрытия возникает малая асимметрия, поэтому есть смысл использовать это обстоятельство для упрощения уравнений движения. Будем пренебрегать влиянием подъёмной силы на изменение угла наклона траектории  $\vartheta$ , поскольку на достаточно большом промежутке времени, равном периоду полного оборота продольной оси аппарата по конусу

прецессии, осреднённое значение подъёмной силы обращается в нуль. Систему уравнений движения центра масс тела (1.20) перепишем в виде

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= -c_{xa} \frac{qS}{m} - g \sin \vartheta, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= -\frac{\cos \vartheta}{V} \left( g - \frac{V^2}{r} \right), \\ \frac{dH}{dt} &= V \sin \vartheta.\end{aligned}\tag{1.23}$$

Оставим в рассмотрении только две системы координат: траекторную  $OX_k Y_k Z_k$  и связанную систему  $OXYZ$ . Переход от траекторной к связанной системе можно осуществить с помощью трёх углов Эйлера (рис. 1.1): угла скоростного крена  $\gamma_a$  (прецессия), пространственного угла атаки  $\alpha_n$  (нутация) и угла аэродинамического крена  $\varphi_n$  (собственное вращение). Связанная система координат  $OXYZ$  в общем случае не является главной, и геометрия масс определяется шестью компонентами тензора инерции: тремя осевыми моментами инерции  $I_x, I_y, I_z$  и тремя центробежными  $I_{xy}, I_{yz}, I_{xz}$ . Имеет смысл, не нарушая общности, сократить число центробежных моментов инерции за счёт поворота связанной системы координат вокруг одной из собственных осей. Обозначим в качестве исходной связанную систему  $OX'Y'Z'$ , в которой все шесть компонентов тензора инерции не равны нулю, и повернём её вокруг оси  $OX'$  на некоторый угол  $\chi$ . Положение произвольной точки в полученной в результате поворота новой системе координат  $OXYZ$  определяется по следующим формулам:

$$\begin{aligned}x &= x', \\ y &= y' \cos \chi + z' \sin \chi, \\ z &= -y' \sin \chi + z' \cos \chi.\end{aligned}$$

Формулы пересчёта для моментов инерции тела в системе  $OXYZ$  через моменты инерции в исходной системе  $OX'Y'Z'$  имеют вид

$$\begin{aligned}
I_x &= I'_x, \\
I_y &= I'_y \cos^2 \chi + I'_z \sin^2 \chi + -I'_{yz} \sin 2\chi, \\
I_z &= I'_y \sin^2 \chi + I'_z \cos^2 \chi + I'_{yz} \sin 2\chi, \\
I_{xy} &= I'_{xy} \cos \chi + I'_{xz} \sin \chi, \\
I_{yz} &= I'_{yz} \cos 2\chi - \frac{1}{2} (I'_z - I'_y) \sin 2\chi = 0, \\
I_{xz} &= I'_{xz} \cos \chi - I'_{xy} \sin \chi.
\end{aligned} \tag{1.24}$$

Из предпоследней формулы следует, что величина искомого угла поворота равна

$$\chi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2 I'_{yz}}{I'_z - I'_y}.$$

Имея в виду формулы пересчёта (1.24), тензор инерции тела далее будем определять пятью компонентами

$$\|I\| = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_y & 0 \\ -I_{xz} & 0 & I_z \end{bmatrix}.$$

Под малой асимметрией будем понимать, во-первых, смещение центра масс с оси геометрической симметрии ( $\bar{y}_T \neq 0$ ,  $\bar{z}_T \neq 0$ ); во-вторых, несовпадение поперечных моментов инерции тела ( $I_y \neq I_z$ ) и перекос главных центральных осей инерции относительно осей связанной системы координат ( $I_{xy} \neq 0$ ,  $I_{xz} \neq 0$ ); в-третьих, аэродинамическую асимметрию.

Пусть поперечные моменты отличаются от среднего поперечного момента на малые величины

$$I = \frac{I_y + I_z}{2}, \quad I_y = I - \frac{\Delta_i}{2} I, \quad I_z = I + \frac{\Delta_i}{2} I,$$

где малая величина  $\Delta_i = (I_z - I_y)/I$  — безразмерная разность поперечных моментов инерции.

Введём в рассмотрение вектор асимметрии  $\Delta\xi$ , компонентам которого припишем порядок малости  $\varepsilon$

$$\Delta\xi = (\bar{y}_T, \bar{z}_T, \Delta_i, \bar{I}_{xy}, \bar{I}_{xz}, \Delta m_x, \Delta m_y, \Delta m_z) = 0(\varepsilon),$$

где  $\bar{I}_{xy} = I_{xy}/I$ ,  $\bar{I}_{xz} = I_{xz}/I$  — безразмерные центробежные моменты инерции;  $\Delta m_x$ ,  $\Delta m_y$ ,  $\Delta m_z$  — коэффициенты малых возмущающих аэродинамических моментов. Отметим, что коэф-

коэффициенты малых аэродинамических сил  $\Delta c_x, \Delta c_y, \Delta c_z$  входят в коэффициенты возмущающих моментов  $\Delta m_x, \Delta m_y, \Delta m_z$ .

Перепишем уравнения вращательного движения (1.19), сохраняя только линейные члены от асимметрии

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_x &= \frac{M_x}{I_x} - \frac{\Delta_i \omega_y \omega_z}{\bar{I}_x} + \bar{I}_{xy} \left( \frac{M_y}{I_x} - \omega_x \omega_z \right) + \bar{I}_{xz} \left( \frac{M_z}{I_x} + \omega_x \omega_y \right), \\ \dot{\omega}_y &= \frac{M_y}{I} + (1 - \bar{I}_x) \omega_x \omega_z + \Delta_i \omega_x \omega_z + \bar{I}_{xy} \omega_y \omega_z + \bar{I}_{xz} (\omega_z^2 - \omega_x^2), \\ \dot{\omega}_z &= \frac{M_z}{I} - (1 - \bar{I}_x) \omega_x \omega_y + \Delta_i \omega_x \omega_y - \bar{I}_{xz} \omega_y \omega_z - \bar{I}_{xy} (\omega_y^2 - \omega_x^2),\end{aligned}\tag{1.25}$$

где  $\bar{I}_x = I_x/I$ . Коэффициенты полного аэродинамического момента для тела с малой аэродинамической асимметрией определяются формулами (1.8).

Рассмотрим кинематические уравнения (1.22), разрешённые относительно производных углов Эйлера. Продифференцируем эти уравнения по времени и исключим из них угловые скорости  $\omega_y, \omega_z$  и их производные в силу кинематических (1.21) и динамических (1.25) уравнений. В результате получим полную систему уравнений, описывающих движение относительно центра масс, тела с малой асимметрией:

$$\begin{aligned}\ddot{\alpha}_n + \dot{\gamma}_a \sin \alpha_n (\bar{I}_x \omega_x - \dot{\gamma}_a \cos \alpha_n) - M_\alpha(\alpha_n, z) &= \varepsilon \Phi_\alpha(\alpha_n, \varphi_n, z), \\ \ddot{\gamma}_a \sin \alpha_n + (\dot{\alpha}_n + \dot{\alpha}_a) \dot{\gamma}_a \cos \alpha_n - (\dot{\alpha}_n + \lambda_a) \bar{I}_x \omega_x &= \varepsilon \Phi_\gamma(\alpha_n, \varphi_n, z), \\ \dot{\omega}_x &= \frac{1}{\bar{I}_x} \varepsilon \Phi_{\omega_x}(\alpha_n, \varphi_n, z),\end{aligned}\tag{1.26}$$

$$\dot{\varphi}_n = \omega_x - \dot{\gamma}_a \cos \alpha_n + (\lambda_y \sin \varphi_n + \lambda_z \cos \varphi_n) \sin \alpha_n.$$

Здесь

$$\begin{aligned}\varepsilon \Phi_\nu &= D_0^\nu(\alpha_n, z) + D_1^\nu(\alpha_n, z) \sin \varphi_n + D_2^\nu(\alpha_n, z) \cos \varphi_n + \\ &+ D_3^\nu(\alpha_n, z) \sin 2\varphi_n + D_4^\nu(\alpha_n, z) \cos 2\varphi_n\end{aligned}$$

—  $2\pi$ -периодическая функция пространственного угла атаки и угла собственного вращения,  $z = (\omega_x, V, H)$  — вектор медленно меняющихся параметров,  $\nu = \alpha, \omega_x, \gamma$ . Коэффициенты  $D_i^\nu$  определяются через характеристики тела и параметры движения:

$$D_0^\alpha = \left( \frac{m_{zn}^{\bar{\omega}_z} l^2}{I} - \frac{c_{ya}^\alpha}{m} \right) \frac{q S \dot{\alpha}_n}{V} + \frac{\Delta_i}{2} (h \bar{I}_x \omega_x - M_\alpha),$$

$$D_1^\alpha = -A_y + \bar{I}_{xy}h\dot{\alpha}_a + \bar{I}_{xz}(h^2 - \omega_x^2) + \\ + \lambda_y(1 - \bar{I}_x)\omega_x \cos \alpha_n - \lambda_z\dot{\alpha}_n \sin \alpha_n - h \lambda_y \sin \alpha_n,$$

$$D_2^\alpha = A_z + \bar{I}_{xy}(\omega_x^2 - h^2) + \bar{I}_{xz}h\dot{\alpha}_a + \\ + \lambda_y\dot{\alpha}_n \sin \alpha_n + \lambda_z(1 - \bar{I}_x)\omega_x \cos \alpha_n - h \lambda_z \sin \alpha_n,$$

$$D_3^\alpha = \frac{\Delta_i}{2}\bar{I}_x\omega_x\dot{\alpha}_a\left(2\frac{1}{\bar{I}_x} - 1\right),$$

$$D_4^\alpha = \frac{\Delta_i}{2}[\bar{I}_x\omega_x h(1 - 2\frac{1}{\bar{I}_x}) - M_\alpha],$$

$$D_0^\gamma = -(m_{yn}^{\bar{\omega}_x}\omega_x - m_{yn}^{\bar{\omega}_y}h)\frac{qSl^2}{VI} - \frac{1}{2}\Delta_i\bar{I}_x\omega_x\dot{\alpha}_a,$$

$$D_1^\gamma = A_z + \bar{I}_{xy}(\omega_x^2 - \dot{\alpha}_a^2) - \bar{I}_{xz}h\dot{\alpha}_a + \\ + \lambda_y\dot{\alpha}_n \sin \alpha_n + \lambda_z(1 - \bar{I}_x)\omega_x \cos \alpha_n + \lambda_y\dot{\alpha}_a \sin \alpha_n,$$

$$D_2^\gamma = A_y + \bar{I}_{xy}h\dot{\alpha}_a + \bar{I}_{xz}(\omega_x^2 - \dot{\alpha}_a^2) - \\ - \lambda_y(1 - \bar{I}_x)\omega_x \cos \alpha_n + \lambda_z\dot{\alpha}_n \sin \alpha_n + \lambda_z\dot{\alpha}_a \sin \alpha_n,$$

$$D_3^\gamma = \frac{\Delta_i}{2}[\bar{I}_x\omega_x h(1 - 2\frac{1}{\bar{I}_x}) - M_\alpha],$$

$$D_4^\gamma = \frac{1}{2}\Delta_i\bar{I}_x\omega_x\dot{\alpha}_a(1 - 2\frac{1}{\bar{I}_x}),$$

$$D_0^{\omega_x} = [(m_{xn}^{\bar{\omega}_x}\omega_x - m_{xn}^{\bar{\omega}_y}h)\frac{l}{V} + \Delta m_x]\frac{qSl}{I},$$

$$D_1^{\omega_x} = -\frac{\bar{y}_T c_n qSl}{I} + \bar{I}_{xy}(M_\alpha - \bar{I}_x\omega_x h) + \bar{I}_{xz}\dot{\alpha}_a\bar{I}_x\omega_x,$$

$$D_2^{\omega_x} = -\frac{\bar{z}_T c_n qSl}{I} + \bar{I}_{xz}(M_\alpha - \bar{I}_x\omega_x h) - \bar{I}_{xy}\dot{\alpha}_a\bar{I}_x\omega_x,$$

$$D_3^{\omega_x} = \frac{\Delta_i}{2}(h^2 - \dot{\alpha}_a^2),$$

$$D_4^{\omega_x} = \Delta_i\dot{\alpha}_a h,$$

где

$$M_\alpha = \frac{m_\alpha qSl}{I}, \quad h = \dot{\gamma}_a \sin \alpha_n, \quad \dot{\alpha}_a = \dot{\alpha}_n + \lambda_a,$$

$$A_z = (\bar{y}_T c_\tau + \Delta c_y \bar{x}_T + \Delta m_z)\frac{qSl}{I},$$

$$A_y = (\bar{z}_T c_\tau + \Delta c_z \bar{x}_T - \Delta m_y)\frac{qSl}{I}.$$

Заметим, что уравнения (1.26) содержат только линейные члены от малой асимметрии. Учитывая, что компоненты вектора малой асимметрии имеют порядок малости  $\varepsilon$ , из дальнейшего рассмотрения исключены члены порядка  $\varepsilon^2$  и выше. Такими членами, в частности, являются квадраты разности поперечных моментов инерции  $\Delta_i$ , безразмерных центробежных моментов инерции  $\bar{I}_{xy}$  и  $\bar{I}_{xz}$ , а также произведения безразмерных центробежных моментов инерции и коэффициентов возмущающих моментов  $\Delta m_x$ ,  $\Delta m_y$ ,  $\Delta m_z$ .

#### 1.4. Уравнения движения тела в форме квазиконсервативной системы с двумя степенями свободы

При исследовании вращательного движения в атмосфере осесимметричного тела с малой асимметрией имеет смысл опираться на один из классических случаев движения твёрдого тела вокруг неподвижной точки — случай Лагранжа. На статически устойчивое тело действует восстанавливающий аэродинамический момент, который является нечётной функцией пространственного угла атаки (угла нутации). Для тела сферической формы этот момент, как и для волчка Лагранжа, пропорционален синусу угла атаки. Кроме того, действуют малые возмущающие аэродинамические моменты.

Известно, что для случая Лагранжа обобщённые импульсы, соответствующие углам собственного вращения и прецессии, являются первыми интегралами движения [38] и представляют собой проекции кинетического момента на ось симметрии тела и ось прецессии. Имея в виду, что при движении тела в атмосфере ось прецессии совпадает с направлением вектора поступательной скорости, представим с точностью до множителя указанные обобщённые импульсы в следующем виде:

$$R = \bar{I}_x \omega_x, \quad (1.27)$$

$$G = R \cos \alpha_n + (-\omega_y \cos \varphi_n + \omega_z \sin \varphi_n) \sin \alpha_n. \quad (1.28)$$

Можно предположить, что в силу действующих малых возмущений эти величины будут медленно изменяться во времени при спуске тела в атмосфере. Выберем их в качестве новых переменных при выводе уравнений вращательного движения.

С учётом кинематических уравнений (1.21) перепишем (1.28) в виде

$$G = R \cos \alpha_n + \dot{\gamma}_a \sin^2 \alpha_n + (\lambda_y \sin \varphi_n + \lambda_z \cos \varphi_n) \cos \alpha_n \sin \alpha_n. \quad (1.29)$$

Заменим в системе уравнений (1.26) в силу соотношений (1.27) и (1.29)  $\omega_x$  и  $\dot{\omega}_x$  на  $R$  и  $\dot{R}$ , а  $\dot{\gamma}_a$  и  $\ddot{\gamma}_a$  на  $G$  и  $\dot{G}$ . В результате система нелинейных дифференциальных уравнений, описывающая движение вокруг центра масс тела с малой асимметрией, примет вид [12]:

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha}_n + \frac{(R - G \cos \alpha_n)(G - R \cos \alpha_n)}{\sin^3 \alpha_n} - M_\alpha(\alpha_n, z) &= \varepsilon \Phi_\alpha(\alpha_n, \varphi_n, z), \\ \dot{R} &= \varepsilon \Phi_R(\alpha_n, \varphi_n, z), \\ \dot{G} &= \varepsilon \Phi_G(\alpha_n, \varphi_n, z), \end{aligned} \quad (1.30)$$

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_n &= \frac{1}{\bar{I}_x} R - \frac{(G - R \cos \alpha_n) \cos \alpha_n}{\sin^2 \alpha_n} + \frac{(-\lambda_y \sin \varphi_n + \lambda_z \cos \varphi_n) \cos^2 \alpha_n}{\sin \alpha_n}, \\ \dot{\gamma}_a &= \frac{G - R \cos \alpha_n}{\sin^2 \alpha_n} - (\lambda_y \sin \varphi_n + \lambda_z \cos \varphi_n) \operatorname{ctg} \alpha_n. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \varepsilon \Phi_\nu &= D_0^\nu(\alpha_n, z) + D_1^\nu(\alpha_n, z) \sin \varphi_n + D_2^\nu(\alpha_n, z) \cos \varphi_n + \\ &+ D_3^\nu(\alpha_n, z) \sin 2\varphi_n + D_4^\nu(\alpha_n, z) \cos 2\varphi_n \end{aligned}$$

—  $2\pi$ -периодическая функция пространственного угла атаки и угла собственного вращения,  $z = (R, G)$  — вектор медленно меняющихся параметров,  $\nu = \alpha, R, G$ . Коэффициенты  $D_i^\nu$  определяются через характеристики тела и параметры движения.

$$D_0^\alpha = \left( \frac{m \bar{\omega}_z l^2}{I} - \frac{c_{ya}^\alpha}{m} \right) \frac{q S \dot{\alpha}_n}{V} + \frac{\Delta_i}{2} (hR - M_\alpha),$$

$$\begin{aligned} D_1^\alpha &= -A_y + \bar{I}_{xy} h \dot{\alpha}_a + \bar{I}_{xz} \left( h^2 - \frac{1}{\bar{I}_x^2} R^2 \right) + \\ &+ \lambda_y \cos \alpha_n (R - 2h \operatorname{ctg} \alpha_n) - \lambda_z \dot{\alpha}_n \sin \alpha_n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_2^\alpha &= A_z + \bar{I}_{xz} h \dot{\alpha}_a + \bar{I}_{xy} \left( \frac{1}{\bar{I}_x^2} R^2 - h^2 \right) + \\ &+ \lambda_z \cos \alpha_n (R - 2h \operatorname{ctg} \alpha_n) + \lambda_y \dot{\alpha}_n \sin \alpha_n, \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 D_3^\alpha &= \frac{\Delta_i}{2} R \dot{\alpha}_a \left( 2 \frac{1}{\bar{I}_x} - 1 \right), \\
 D_4^\alpha &= \Delta_i \left[ Rh \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\bar{I}_x} \right) - M_\alpha \right], \\
 D_0^R &= \left[ \left( m_{xn}^{\bar{w}_x} \frac{1}{\bar{I}_x} R - m_{xn}^{\bar{w}_y} h \right) \frac{l}{V} + \Delta m_x \right] \frac{qSl}{I}, \\
 D_1^R &= -\frac{\bar{y}_T c_n qSl}{I} + \bar{I}_{xy} (M_\alpha - Rh) + \bar{I}_{xz} \dot{\alpha}_a R, \\
 D_2^R &= -\frac{\bar{z}_T c_n qSl}{I} + \bar{I}_{xz} (M_\alpha - Rh) - \bar{I}_{xy} \dot{\alpha}_a R, \\
 D_3^R &= \Delta_i \frac{(h^2 - \dot{\alpha}_a^2)}{2}, \\
 D_4^R &= \Delta_i \dot{\alpha}_a h, \\
 D_0^G &= \left[ \left( m_{yn}^{\bar{w}_x} \cos \alpha_n - m_{xn}^{\bar{w}_x} \sin \alpha_n \right) \frac{R}{\bar{I}_x} - \right. \\
 &\quad \left. - h \left( m_{xn}^{\bar{w}_y} \cos \alpha_n - m_{yn}^{\bar{w}_y} \sin \alpha_n \right) \right] \frac{qSl^2}{VI} + \Delta m_x \frac{qSl}{I} \cos \alpha_n, \\
 D_1^G &= [\bar{y}_T (c_\tau \sin \alpha_n - c_n \cos \alpha_n) + \Delta m_z \sin \alpha_n] \frac{qSl}{I} + \\
 &\quad + \left[ \bar{I}_{xy} \left( \frac{1}{\bar{I}_x^2} R^2 - \dot{\alpha}_a^2 \right) - \bar{I}_{xz} h \dot{\alpha}_a \right] \sin \alpha_n + \\
 &\quad + [\bar{I}_{xy} (M_\alpha - Rh) + \bar{I}_{xz} \dot{\alpha}_a R] \cos \alpha_n + \\
 &\quad + \lambda_y \dot{\alpha}_n \cos^2 \alpha_n + \frac{1}{2} \lambda_z [\omega_x - R - \dot{\varphi}_n] \sin 2\alpha_n + \Delta c_y \bar{x}_T \frac{qSl}{I} \sin \alpha_n, \\
 D_2^G &= [\bar{z}_T (c_\tau \sin \alpha_n - c_n \cos \alpha_n) - \Delta m_y \sin \alpha_n] \frac{qSl}{I} + \\
 &\quad + \left[ \bar{I}_{xz} \left( \frac{1}{\bar{I}_x^2} R^2 - \dot{\alpha}_a^2 \right) + \bar{I}_{xy} h \dot{\alpha}_a \right] \sin \alpha_n + \\
 &\quad + [\bar{I}_{xz} (M_\alpha - Rh) - \bar{I}_{xy} \dot{\alpha}_a R] \cos \alpha_n + \\
 &\quad + \lambda_z \dot{\alpha}_n \cos^2 \alpha_n - \frac{1}{2} \lambda_y [\omega_x - R - \dot{\varphi}_n] \sin 2\alpha_n + \Delta c_z \bar{x}_T \frac{qSl}{I} \sin \alpha_n, \\
 D_3^G &= \frac{\Delta_i}{2} \left( (h^2 - \dot{\alpha}_a^2) \cos \alpha_n + \left[ Rh \left( 1 - \frac{2}{\bar{I}_x} \right) - M_\alpha \right] \sin \alpha_n \right),
 \end{aligned}$$

$$D_4^G = \Delta_i \dot{\alpha}_a \left[ \frac{R}{2} \left( 1 - \frac{2}{\bar{I}_x} \right) \sin \alpha_n + h \cos \alpha_n \right],$$

где

$$h = \frac{G - R \cos \alpha_n}{\sin \alpha_n} - (\lambda_y \sin \varphi_n + \lambda_z \cos \varphi_n) \cos \alpha_n.$$

Правые части уравнений системы (1.30) зависят только от двух угловых переменных:  $\alpha_n, \varphi_n$ . Третий угол — угол скоростного крена (угол прецессии)  $\gamma_a$  характеризует положение плоскости пространственного угла атаки относительно траекторной системы координат  $OX_k Y_k Z_k$ . Эту угловую координату следует принимать во внимание, когда решается задача о рассеивании точек падения тела на поверхность планеты. Далее дифференциальное уравнение для угла скоростного крена рассматривать не будем.

Уравнение для угла аэродинамического крена  $\varphi_n$  в системе (1.30) содержит члены порядка единицы и порядка малости  $\varepsilon$ . Угол аэродинамического крена  $\varphi_n$  относится к быстрым переменным, а поскольку от него зависят только члены порядка малости  $\varepsilon$  уравнений системы (1.30), то слагаемые порядка  $\varepsilon$  в уравнении для угла  $\varphi_n$  будем опускать.

Ниже будет показано, что скорость полёта, угол наклона траектории, высота полёта меняются существенно медленнее угловых параметров движения. Это допущение позволяет приписать порядок малости  $\varepsilon$  правым частям уравнений поступательного движения (1.23) и расширить размерность вектора медленно меняющихся параметров  $z = (R, G, V, \vartheta, H)$ . Объединяя системы (1.23) и (1.30), запишем систему уравнений движения тела с малой асимметрией в следующем виде:

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha}_n + \frac{(R - G \cos \alpha_n)(G - R \cos \alpha_n)}{\sin^3 \alpha_n} - M_\alpha(\alpha_n, z) &= \varepsilon \Phi_\alpha(\alpha_n, \varphi_n, z), \\ \dot{\varphi}_n &= \frac{1}{\bar{I}_x} R - \frac{(G - R \cos \alpha_n) \cos \alpha_n}{\sin^2 \alpha_n}, \\ \dot{z} &= \varepsilon \Phi_z(\alpha_n, \varphi_n, z), \end{aligned} \quad (1.31)$$

где  $z = (R, G, V, \vartheta, H)$ ,  $\nu = \alpha, \varphi, \vartheta, R, G, V, H$ .

Система уравнений движения тела с малой асимметрией (1.31) наряду с преимуществами обладает и одним весьма существенным недостатком: уравнения этой системы имеют особенность в окрестности точки  $\alpha_n = 0$ . При численном интегрировании уравнений движения в окрестности этой точки требуется дробление шага интегрирования, что увеличивает затраты

машинного времени на получение решения. Указанная особенность обусловлена наличием медленной переменной  $G$ , введённой в уравнения (1.31) заменой (1.29). Если рассматривается задача о движении тела в окрестности малых углов атаки, то целесообразно использовать либо полную нелинейную систему уравнений (1.26), либо линеаризованные уравнения движения, полученные специально для этого случая движения.

### 1.5. Линеаризованные уравнения движения

Систему уравнений движения относительно центра масс тела с малой асимметрией (1.26) можно линеаризовать по пространственному углу атаки в окрестности точки  $\alpha_n = 0$ , полагая, что угол атаки мал.

Введём в рассмотрение главную систему координат  $OX_*Y_*Z_*$ , связанную с телом, для которой тензор инерции тела представляет собой симметричную матрицу вида

$$\|I\| = \begin{bmatrix} I_{x_*} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y_*} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z_*} \end{bmatrix}.$$

Связанную систему  $OXYZ$ , как и ранее, выберем таким образом, чтобы центробежный момент инерции  $I_{yz} = 0$ . Безразмерные центробежные моменты инерции  $\bar{I}_{xy}$  и  $\bar{I}_{xz}$  будем считать малыми, а поперечные моменты инерции намного больше продольного ( $I_y, I_z \gg I_x$ ), что справедливо для тел достаточно большого удлинения, именно такие тела совершают движение преимущественно на малых углах атаки, поскольку обладают существенными демпфирующими свойствами. Тогда переход от связанной системы координат  $OXYZ$  к главной  $OX_*Y_*Z_*$  (рис. 1.6) осуществляется с помощью двух последовательных поворотов на малые углы  $\chi_1$  и  $\chi_2$ ,

$$\chi_1 = \frac{I_{xy}}{I_y - I_x}, \quad \chi_2 = -\frac{I_{xz}}{I_z - I_x}. \quad (1.32)$$

Припишем инерционной асимметрии, которая в этом случае характеризуется углами  $\chi_1$  и  $\chi_2$ , порядок малости  $\varepsilon$ . Матрица направляющих косинусов главных осей инерции относительно связанных может быть аппроксимирована матрицей малого поворота вида

$$\|A_c^*\| = \begin{bmatrix} 1 & \chi_1 & -\chi_2 \\ -\chi_1 & 1 & 0 \\ \chi_2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

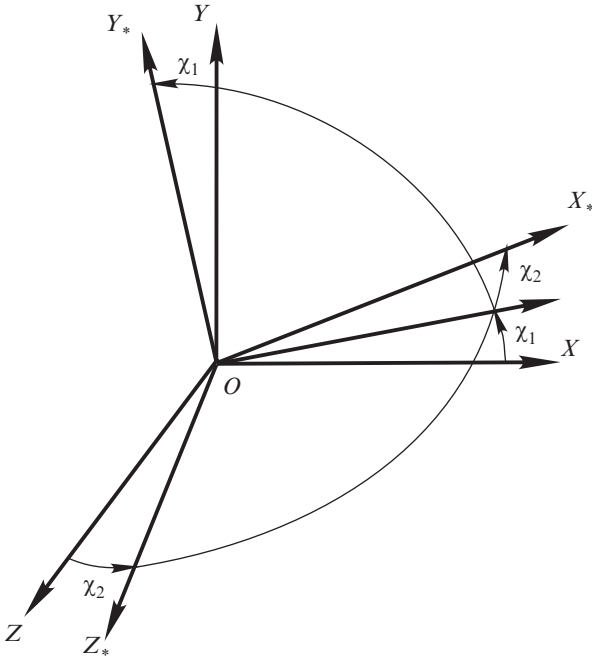


Рис. 1.6. Взаимное расположение связанной  $OXYZ$  и главной  $OX_*Y_*Z_*$  систем координат

Для упрощения системы уравнений (1.26) синус и косинус пространственного угла атаки заменим на их приближения:  $\sin \alpha_n \approx \alpha_n$ ,  $\cos \alpha_n \approx 1$ , а нечётные и чётные коэффициенты аэродинамических сил и моментов — первыми членами соответствующих степенных рядов

$$c_n = c_n^\alpha \alpha_n, \quad c_\tau = c_{\tau 0}, \quad m_\alpha = m^\alpha \alpha_n = -(\bar{x}_D - \bar{x}_T) c_n^\alpha \alpha_n, \\ m_{y\dot{n}} = m_{z\dot{n}} = m^{\bar{y}}, \quad m_{x\dot{n}} = m_{x\dot{n}}^{\bar{y}, \alpha} \alpha_n, \quad m_{y\ddot{n}} = m_m \alpha_n,$$

где  $(\bar{x}_D - \bar{x}_T)$  — запас статической устойчивости,  $m_m$  — коэффициент момента Магнуса. Угловая скорость  $\lambda_a$  из системы (1.21) согласно условиям линеаризации будет определяться следующим соотношением:

$$\lambda_a = \lambda_a^\alpha \alpha_n = (c_n^\alpha - c_\tau) \frac{qS}{mV} \alpha_n.$$

Центробежные моменты инерции заменим на соответствующие углы поворота связанных осей согласно формулам (1.32). Тогда система уравнений движения тела относительно центра масс при

малых углах атаки с малой аэродинамической и динамической асимметрией (1.26) примет вид

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha}_n + \dot{\gamma}_a \alpha_n (\bar{I}_x \omega_x - \dot{\gamma}_a) + \omega_a^2 \alpha_n &= \left( \frac{M^{\bar{\omega}}}{I} - \lambda_a^\alpha \right) \dot{\alpha}_n + A_z \cos \varphi_n - \\ &- A_y \sin \varphi_n + \eta \omega_x [(\chi_1 \cos \varphi_n + \chi_2 \sin \varphi_n) \omega_x + \\ &+ (\lambda_y \sin \varphi_n + \lambda_z \cos \varphi_n)] + L_\alpha, \\ \dot{\gamma}_a \alpha_n + (2\dot{\alpha}_n + \lambda_a^\alpha \alpha_n) \dot{\gamma}_a - (\dot{\alpha}_n + \lambda_a^\alpha \alpha_n) \bar{I}_x \omega_x &= \\ = -(M_m \omega_x - M^\omega \dot{\gamma}_a) \frac{\alpha_n}{I} + A_z \sin \varphi_n + A_y \cos \varphi_n + \\ + \eta \omega_x [(\chi_1 \sin \varphi_n - \chi_2 \cos \varphi_n) \omega_x - (\lambda_y \cos \varphi_n - \lambda_z \sin \varphi_n)] &+ L_\gamma, \end{aligned} \quad (1.33)$$

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_x &= \frac{1}{I_x} [M_x^{\bar{\omega}_x} \omega_x + \Delta M_x - M_x^{\bar{\omega}_y, \alpha} \dot{\gamma}_a \alpha_n^2 - \\ &- (\bar{y}_T \sin \varphi_n + \bar{z}_T \cos \varphi_n) N^\alpha \alpha_n - \\ &- \eta (\chi_1 \sin \varphi_n - \chi_2 \cos \varphi_n) I \omega_a^2 \alpha_n] + L_{\omega_x}, \\ \dot{\varphi}_n &= \omega_x - \dot{\gamma}_a. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} N^\alpha &= c_n^\alpha q S l, \quad M^{\bar{\omega}} = m^{\bar{\omega}} \frac{q S l^2}{V}, \quad M_x^{\bar{\omega}_x} = m_{xn}^{\bar{\omega}_x} \frac{q S l^2}{V}, \\ M_x^{\bar{\omega}_y, \alpha} &= m_{xn}^{\bar{\omega}_y, \alpha} \frac{q S l^2}{V}, \quad \Delta M_x = \Delta m_x q S l, \\ M_m &= m_m \frac{q S l^2}{V}, \quad \omega_a^2 = c_n^\alpha (\bar{x}_\Pi - \bar{x}_T) \frac{q S l}{I}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_\alpha &= -\eta (\chi_1 \cos \varphi_n + \chi_2 \sin \varphi_n) \dot{\gamma}_a^2 \alpha_n^2 - \\ &- (\lambda_y \sin \varphi_n + \lambda_z \cos \varphi_n) \dot{\gamma}_a \alpha_n^2 + \\ + \eta (\chi_1 \sin \varphi_n - \chi_2 \cos \varphi_n) \dot{\gamma}_a \dot{\alpha}_n \alpha_n + (\lambda_y \cos \varphi_n - \lambda_z \sin \varphi_n) \dot{\alpha}_n \alpha_n &+ \\ + \frac{\Delta_i}{2} [\bar{I}_x \omega_x \dot{\gamma}_a \alpha_n + \omega_a^2 \alpha_n + \\ + \omega_x (\bar{I}_x - 2) (-\dot{\alpha}_n \sin 2\varphi_n + \dot{\gamma}_a \alpha_n \cos 2\varphi_n) + \omega_a^2 \alpha_n \cos 2\varphi_n], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_\gamma = & \eta(\chi_2 \sin \varphi_n + \chi_1 \cos \varphi_n) \dot{\alpha}_n \dot{\gamma}_a \alpha_n - \\
& - \eta(\chi_1 \sin \varphi_n - \chi_2 \cos \varphi_n) \dot{\alpha}_a^2 - \\
& + (\lambda_y \sin \varphi_n + \lambda_z \cos \varphi_n) (\dot{\alpha}_n + \dot{\alpha}_a) \alpha_n + \\
& + \frac{\Delta_i}{2} [-\bar{I}_x \omega_x \dot{\alpha}_a + \omega_x (\bar{I}_x - 2) (\dot{\gamma}_a \alpha_n \sin 2\varphi_n + \dot{\alpha}_a \cos 2\varphi_n) + \\
& + \omega_a^2 \alpha_n \sin 2\varphi_n],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{\omega_x} = & -\eta[(\chi_1 \sin \varphi_n - \chi_2 \cos \varphi_n) \dot{\gamma}_a \alpha_n + \\
& + (\chi_1 \cos \varphi_n + \chi_2 \sin \varphi_n) \dot{\alpha}_a] \omega_x + \\
& + \frac{\Delta_i}{\bar{I}_x} \left[ \frac{\dot{\gamma}_a^2 \alpha_n^2 - \dot{\alpha}_a^2}{2} \sin 2\varphi_n + \dot{\alpha}_a \dot{\gamma}_a \alpha_n \cos 2\varphi_n \right], \\
\dot{\alpha}_a = & \dot{\alpha}_n + \lambda_a^\alpha \alpha_n, \quad \eta = (1 - \bar{I}_x).
\end{aligned}$$

Существенные упрощения в системе (1.33) можно получить, если перейти к комплексным переменным. Запишем две формы уравнений движений в комплексном виде. В первом случае комплексный угол атаки определяет связь между траекторной системой координат  $OX_k Y_k Z_k$  и системой координат, связанной с пространственным углом атаки,  $OX_n Y_n Z_n$ ,

$$\delta = \alpha_n \exp(i\gamma_a). \quad (1.34)$$

Во втором случае комплексный угол атаки определяет связь между скоростной системой координат  $OX_a Y_a Z_a$  и связанной  $OXYZ$ ,

$$\xi = \alpha + i\beta, \quad (1.35)$$

где  $\alpha, \beta$  — угол атаки и угол скольжения.

Первую форму уравнений получим, если умножить второе уравнение системы (1.33) на  $i$ , сложить с первым уравнением и воспользоваться заменой переменных (1.34). Результат представим в виде

$$\begin{aligned}
\ddot{\delta} + \left( -\frac{M^{\bar{\omega}}}{I} + \lambda_a^\alpha - i\bar{I}_x \omega_x \right) \dot{\delta} + \left[ \omega_a^2 - i \left( \lambda_a^\alpha \bar{I}_x - \frac{M_m}{I} \right) \omega_x \right] \delta = \\
= \{ (A_z + iA_y) + \eta \omega_x [(\chi_1 - i\chi_2) \omega_x + (\lambda_z - i\lambda_y)] \} \times \\
\times \exp [i(\Phi - \Phi_0)] + L_\delta(\delta),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_x = & \frac{1}{I_x} \{ M_x^{\bar{\omega}_x} \omega_x + \Delta M_x - M_{x\bar{n}}^{\bar{\omega}_y, \alpha} \dot{\gamma}_a |\delta|^2 + \\ & + [(-\bar{z}_T N^\alpha + \chi_2 \eta I \omega_a^2) \operatorname{Re} \delta + (\bar{y}_T N^\alpha + \chi_1 \eta I \omega_a^2) \operatorname{Im} \delta] \times \\ & \times \exp[-i(\Phi - \Phi_0)] \} + L_{\omega_x}(\delta), \end{aligned} \quad (1.36)$$

$$\dot{\varphi}_n = \omega_x - \dot{\gamma}_a,$$

где

$$\Phi - \Phi_0 = \varphi_n + \gamma_a = \int_{t_0}^t \omega_x dt, \quad (1.37)$$

$$L_\delta = (L_\alpha + iL_\gamma) \exp(i\gamma_a).$$

При выводе этой системы использовались следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \alpha_n \cos \varphi_n &= \exp[-i(\Phi - \Phi_0)] \operatorname{Re} \delta, \\ \alpha_n \sin \varphi_n &= -\exp[-i(\Phi - \Phi_0)] \operatorname{Im} \delta, \end{aligned} \quad (1.38)$$

которые следуют из формул (1.34) и (1.37). Выражения для  $L_\delta$  и  $L_{\omega_x}$  зависят от  $\alpha_n$ ,  $\dot{\alpha}_n$ ,  $\dot{\gamma}_a$ , которые явным образом не входят в уравнения системы (1.36), записанные в комплексной форме. В силу замены (1.36) можно записать для этих переменных следующие формулы:

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \sqrt{(\operatorname{Re} \delta)^2 + (\operatorname{Im} \delta)^2}, \quad \operatorname{tg} \gamma_a = \frac{\operatorname{Im} \delta}{\operatorname{Re} \delta}, \\ \dot{\alpha}_n &= \frac{\operatorname{Re} \delta (\operatorname{Re} \delta)' + \operatorname{Im} \delta (\operatorname{Im} \delta)'}{\sqrt{(\operatorname{Re} \delta)^2 + (\operatorname{Im} \delta)^2}} \dot{\delta}, \quad \dot{\gamma}_a = \frac{\operatorname{Re} \delta (\operatorname{Im} \delta)' - \operatorname{Im} \delta (\operatorname{Re} \delta)'}{(\operatorname{Re} \delta)^2 + (\operatorname{Im} \delta)^2} \dot{\delta}, \end{aligned}$$

где штрих означает частную производную по  $\delta$ .

Для ряда задач о движении в атмосфере спускаемых аппаратов, капсул и головных частей принимают следующие допущения: поперечные моменты инерции тела считают равными друг другу ( $I_y = I_z = I$  и  $\Delta_i = (I_z - I_y)/I_y = 0$ ) и полагают, что тело закручено относительно собственной оси симметрии ( $\omega_x^2 \gg \dot{\alpha}_n^2$ ). Тогда система (1.36) значительно упрощается и принимает вид

$$\begin{aligned} \ddot{\delta} + \left( -\frac{M^{\bar{\omega}}}{I} + \lambda_a^\alpha - i\bar{I}_x \omega_x \right) \dot{\delta} + \left[ \omega_a^2 - i \left( \lambda_a^\alpha \bar{I}_x - \frac{M_m}{I} \right) \omega_x \right] \delta = \\ = \{ (A_z + iA_y) + \eta \omega_x [(\chi_1 - i\chi_2) \omega_x + (\lambda_z - i\lambda_y)] \} \exp[i(\Phi - \Phi_0)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_x = & \frac{1}{I_x} \{ M_x^{\bar{\omega}_x} \omega_x + \Delta M_x - M_{x\bar{n}}^{\bar{\omega}_y, \alpha} \dot{\gamma}_a |\delta|^2 + \\ & + [(-\bar{z}_T N^\alpha + \chi_2 \eta I \omega_a^2) \operatorname{Re} \delta + (\bar{y}_T N^\alpha + \chi_1 \eta I \omega_a^2) \operatorname{Im} \delta] \times \\ & \times \exp[-i(\Phi - \Phi_0)] \}, \quad (1.39) \end{aligned}$$

$$\dot{\varphi}_n = \omega_x - \dot{\gamma}_a.$$

Системы уравнений (1.36) и (1.39) включает в себя комплексный угол атаки  $\delta$ , который, согласно замене (1.34), зависит от пространственного угла атаки  $\alpha_n$  и угла скоростного крена  $\gamma_a$ , то есть определяет связь между траекторной системой координат  $OX_k Y_k Z_k$  и системой координат, связанной с пространственным углом атаки,  $OX_n Y_n Z_n$  (рис. 1.1). Системы уравнений (1.36) и (1.39) удобно использовать при решении задач о рассеивании точек падения тел на поверхность планеты [45].

Получим уравнения движения для комплексного угла атаки  $\xi$ . Согласно (1.12) формулу (1.35) запишем в виде

$$\xi = \alpha + i\beta = \alpha_n (\cos \varphi_n - i \sin \varphi_n) = \alpha_n \exp(-i\varphi_n). \quad (1.40)$$

Исключим из формул (1.34) и (1.40)  $\alpha_n$  и в результате получим связь между комплексными углами атаки  $\xi$  и  $\delta$

$$\xi = \delta \exp[-i(\gamma_a + \varphi_n)]. \quad (1.41)$$

Действительную и мнимую части новой комплексной переменной с учётом соотношения (1.38) можно представить следующим образом:

$$\operatorname{Re} \xi = e^{-i(\Phi - \Phi_0)} \operatorname{Re} \delta, \quad \operatorname{Im} \xi = e^{-i(\Phi - \Phi_0)} \operatorname{Im} \delta. \quad (1.42)$$

Выполняя замену переменных (1.41)–(1.42) в системе уравнений (1.39), запишем систему уравнений движения для комплексной переменной  $\xi$

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} + \left[ -\frac{M^{\bar{\omega}}}{I} + \lambda_a^\alpha + i(1 + \eta)\omega_x \right] \dot{\xi} + \\ + \left[ \omega_a^2 - \eta\omega_x^2 + i \left( \frac{\dot{\omega}_x}{\omega_x} + \frac{M_m}{I} + \eta\lambda_a^\alpha - \frac{M^\omega}{I} \right) \omega_x \right] \xi = \\ = A_z + \eta\omega_x(\chi_1\omega_x + \lambda_z) + i[A_y - \eta\omega_x(\chi_2\omega_x + \lambda_y)], \end{aligned}$$



$$\dot{\omega}_x = \frac{1}{I_x} \{ M_x^{\bar{\omega}_x} \omega_x + \Delta M_x - M_{x\bar{n}}^{\bar{\omega}_y, \alpha} \dot{\gamma}_a |\xi|^2 + (-\bar{z}_T N^\alpha + \chi_2 \eta I \omega_a^2) \operatorname{Re} \xi + (\bar{y}_T N^\alpha + \chi_1 \eta I \omega_a^2) \operatorname{Im} \xi \}, \quad (1.43)$$

$$\dot{\varphi}_n = \omega_x - \dot{\gamma}_a.$$

Систему уравнений (1.43) удобно использовать при решении задачи идентификации движения по результатам бортовых измерений и в ряде других случаев. Следует отметить, что по аналогичной схеме можно построить подобные уравнения и для полной системы (1.36), когда не вводятся допущения о закнутке тела вокруг продольной оси и о равенстве поперечных моментов инерции.

Таким образом, на основе единого подхода построены различные формы уравнений движения твёрдого тела в атмосфере и дана взаимосвязь между ними.

## 1.6. Влияние начальных условий на характер вращательного движения

Рассмотрим влияние начальных условий углового движения, которые реализуются при входе тела в атмосферу, на характер его движения относительно центра масс при спуске. Будем считать, что начальные условия задаются в разреженных слоях атмосферы, где влиянием аэродинамических моментов можно пренебречь. Будем также считать, что кинетическая энергия вращения тела существенно больше работы возмущающих сил, обусловленных влиянием светового давления Солнца, гравитационного и магнитного полей планеты. Рассмотрим случай, когда тело динамически осесимметрично. Тогда его вращательное движение представляет собой регулярную прецессию, при которой продольная ось, проходящая через центр масс, описывает круговой конус относительно неизменного в пространстве направления вектора кинетического момента  $\mathbf{Q}_0$ . Угол полураствора этого конуса обозначим через  $\varphi_2$ , угол между осью конуса — вектором кинетического момента, и вектором скорости центра масс тела через  $\varphi_1$ , а угол прецессии, отсчитываемый в плоскости, перпендикулярной оси прецессии, через  $\varphi_3$  (рис. 1.7). Последний следует отличать от угла прецессии  $\gamma_a$ , который характеризует прецессию тела относительно вектора поступательной скорости при движении в атмосфере.

Три независимых угла  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  и  $\varphi_3$  определяют положение осесимметричного тела относительно вектора скорости центра

масс [43]. Задание значений этих углов, а также значения модуля вектора угловой скорости  $\omega_0$  или модуля вектора кинетического момента  $Q_0$  однозначно определяет начальные условия вращательного движения.

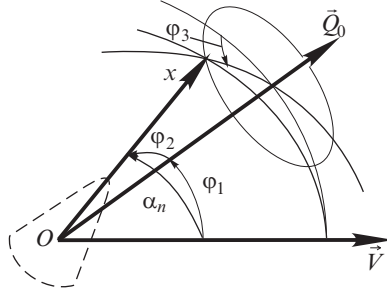


Рис. 1.7. Параметры, определяющие внеатмосферное движение тела

В большинстве случаев, представляющих практический интерес, начальное значение угла  $\varphi_3$  (начальное значение фазы движения тела) можно считать случайной величиной, распределённой равномерно в интервале от 0 до  $2\pi$ . Для однозначности будем рассматривать случай, когда  $Q_{x0} > 0$  и  $\omega_{x0} > 0$ , тогда значения  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  и  $\dot{\varphi}_3$  определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned}\cos \varphi_1 &= \frac{Q_{V0}}{Q_0}, \quad (0 < \varphi_1 < \pi); \\ \cos \varphi_2 &= \frac{Q_{x0}}{Q_0}, \quad (0 < \varphi_2 < \pi/2); \\ \dot{\varphi}_3 &= \frac{Q_0}{I};\end{aligned}$$

где  $Q_0 = [I_x^2 \omega_{x0}^2 + I^2(\omega_{y0}^2 + \omega_{z0}^2)]^{1/2}$ ;  $Q_{V0}$ ,  $Q_{x0}$  — проекции вектора начального кинетического момента на вектор скорости и собственную ось симметрии тела.

Формулы перехода от значений  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$  и  $Q_0$  к начальным условиям для уравнений вращательного движения системы (1.31) имеют вид

$$\begin{aligned}\alpha_{n0} &= \arccos(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3), \\ \dot{\alpha}_{n0} &= -\frac{Q_0 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3}{I \sin \alpha_{n0}}, \\ R_0 &= \frac{Q_0 \cos \varphi_2}{I}, \quad G_0 = \frac{Q_0 \cos \varphi_1}{I}.\end{aligned}$$

На рис. 1.8 изображены виды регулярной прецессии осесимметричного тела при движении вне атмосферы. В теоретической механике регулярную прецессию принято называть прямой (рис. 1.8, а), если угол между вектором угловой скорости собственного вращения  $\dot{\boldsymbol{\phi}}$  и вектором угловой скорости регулярной прецессии  $\dot{\boldsymbol{\phi}}_3$  острый, и обратной (см. рис. 1.8, б), если угол между  $\dot{\boldsymbol{\phi}}$  и  $\dot{\boldsymbol{\phi}}_3$  тупой [19].

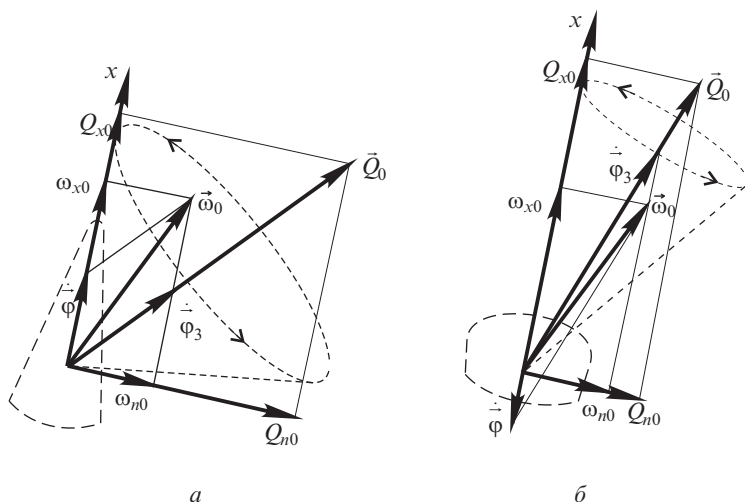


Рис. 1.8. Виды внеатмосферной регулярной прецессии: а) прямая прецессия; б) обратная прецессия

Реализация того или иного вида прецессии определяется соотношением моментов инерции тела. Для случая, когда поперечный момент инерции тела вращения больше продольного:  $I > I_x$  (тело вытянутое, например, конус), реализуется прямая прецессия; для случая, когда  $I_x > I$  (тело вращения сплюснутое, например, диск) — обратная прецессия. Зависимость вида регулярной прецессии от соотношения моментов инерции тела проиллюстрирована на рис. 1.8. Поскольку проекции вектора кинетического момента  $\mathbf{Q}_0$  являются линейными функциями вектора угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}_0$  ( $Q_{x0} = \omega_{x0}I_x$ ,  $Q_{n0} = \omega_{n0}I$ ), то в зависимости от отношения моментов инерции,  $\bar{I}_x = I_x/I > 1$  или  $\bar{I}_x < 1$ , вектор  $\mathbf{Q}_0$  располагается либо между продольной осью и вектором  $\boldsymbol{\omega}_0$ , либо вне. Следовательно, поскольку вектор угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}_0$  разлагается на две составляющие  $\boldsymbol{\phi}$  и  $\boldsymbol{\phi}_3$  по правилу параллелограмма, имеем либо тупой, либо острый угол между ними.

Рассмотрим движение относительно центра масс осесимметричного тела на начальном атмосферном участке полёта. После входа в атмосферу статически устойчивое тело начинает испытывать действие восстанавливающего аэродинамического момента, который стремится совместить продольную ось с вектором поступательной скорости. Однако движению по тангажу противодействуют гироскопические силы, вызывающие вынужденную прецессию вектора кинетического момента  $\mathbf{Q}$  относительно вектора скорости центра масс. Вектор кинетического момента отклоняется в ту сторону, куда направлен вектор восстанавливающего аэродинамического момента. На рис. 1.9 изображены различные случаи вращательного движения осесимметричного тела на начальном атмосферном участке полёта, даны проекции траекторий, описываемых носовой точкой тела, на плоскость, перпендикулярную к вектору скорости центра масс.

В отличие от классических определений видов регулярной прецессии твёрдого тела, данных выше, в задачах о спуске неуправляемого тела в атмосфере принята своя терминология. Прецессию продольной оси тела относительно вектора скорости центра масс  $\mathbf{V}$  на промежутке времени, равном периоду полного оборота, противоположную по направлению данному вектору (для случая  $\omega_x > 0$ ), принято называть «обратной» прецессией (рис. 1.9, *а* и *б*), а совпадающую с направлением вектора скорости центра масс  $\mathbf{V}$  — «прямой» прецессией (рис. 1.9, *в* и *г*) [44].

Проанализируем движение относительно центра масс осесимметричного тела на начальном атмосферном участке полёта для случая, когда угол атаки мал, на основе исследования системы уравнений, записанной для малых углов атаки (1.39). Рассмотрим движение тела без учёта асимметрии, пренебрегая демпфированием. Тогда, используя асимптотический метод ВКБ [32], можно получить следующее решение для комплексного угла атаки в траекторной системе координат:

$$\delta = \alpha_m \exp(i\psi_1) + \alpha_6 \exp(i\psi_2), \quad (1.44)$$

где

$$\alpha_m = \varphi_2 \left[ \frac{\omega(t_0)}{\omega} \right]^{1/2}, \quad \alpha_6 = \varphi_1 \left[ \frac{\omega(t_0)}{\omega} \right]^{1/2}, \quad (1.45)$$

$$\psi_1 = \int_{t_0}^t \left( \omega + \frac{\bar{I}_x \omega_x}{2} \right) dt, \quad \psi_2 = \int_{t_0}^t \left( -\omega + \frac{\bar{I}_x \omega_x}{2} \right) dt,$$

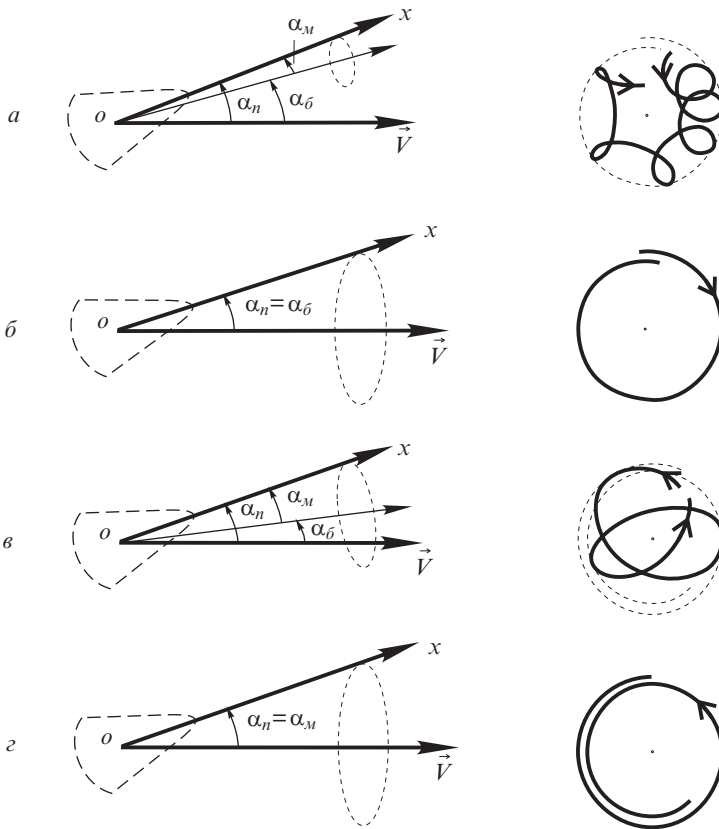


Рис. 1.9. Возможные случаи прецессионного движения осесимметричного тела на начальном атмосферном участке полёта: а) «обратная» прецессия; б) «обратная» прецессия («быстрая» прецессия); в) «прямая» прецессия; г) «прямая» прецессия («медленная» прецессия)

$$\omega = \left[ \omega_a^2 + \frac{(\bar{I}_x \omega_x)^2}{4} \right]^{1/2}, \quad \omega_a^2 = c_n^\alpha (\bar{x}_D - \bar{x}_T) \frac{qSl}{I}, \quad \omega_x > 0.$$

Формула (1.44) показывает, что движение «носика» тела относительно вектора скорости центра масс описывает некоторую кривую, являющуюся суперпозицией двух вращательных движений. Первое из них происходит по окружности радиуса  $\alpha_M$  и имеет мгновенную угловую скорость  $\psi_1 = \omega + \bar{I}_x \omega_x / 2$ . Оно происходит вокруг точки, которая в свою очередь движется по окружности радиуса  $\alpha_\beta$  с мгновенной угловой скоростью  $\dot{\psi}_2 = -\omega + \bar{I}_x \omega_x / 2$ . Такое представление угла атаки в виде суммы двух векторов изображено на рис. 1.10.

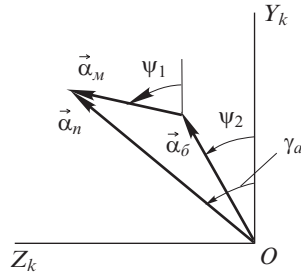


Рис. 1.10. Представление угла атаки в виде суммы двух векторов

Запишем решение для комплексного угла атаки в проекциях на оси траекторной системы координат в виде суммы двух гармонических колебаний

$$\delta_{yk} = \alpha_m \cos \psi_1 + \alpha_\beta \cos \psi_2, \quad \delta_{zk} = \alpha_m \sin \psi_1 + \alpha_\beta \sin \psi_2.$$

Тогда выражение для модуля угла атаки  $|\delta| = \alpha_n$  запишется следующим образом:

$$\alpha_n^2 = \alpha_m^2 + \alpha_\beta^2 + 2\alpha_m\alpha_\beta \cos(\psi_2 - \psi_1),$$

а выражение для фазового угла имеет вид

$$\gamma_a = \operatorname{arctg} \frac{\alpha_m \sin \psi_1 + \alpha_\beta \sin \psi_2}{\alpha_m \cos \psi_1 + \alpha_\beta \cos \psi_2}.$$

Последовательно дифференцируя это соотношение по времени и пренебрегая членами с производными от медленно меняющихся амплитудных характеристик, получаем угловую скорость поворота плоскости пространственного угла атаки относительно траекторной системы координат — скорость прецессии

$$\dot{\gamma}_a = \frac{1}{\alpha_n^2} [\dot{\psi}_1 \alpha_m^2 + \dot{\psi}_2 \alpha_\beta^2 + (\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2) \alpha_m \alpha_\beta \cos(\psi_2 - \psi_1)]. \quad (1.46)$$

Два предельных случая вращательного движения на начальном атмосферном участке полёта, представленные на рис. 1.9 б и г, когда тело совершает симметричное коническое движение  $\alpha_n = \alpha_\beta$  ( $\alpha_m = 0$ ) и  $\alpha_n = \alpha_m$  ( $\alpha_\beta = 0$ ), соответствуют двум значениям прецессионной скорости:

$$\dot{\gamma}_a = \dot{\psi}_2 = -\omega + \frac{\bar{I}_x \omega_x}{2}, \quad \dot{\gamma}_a = \dot{\psi}_1 = \omega + \frac{\bar{I}_x \omega_x}{2}.$$

Из системы уравнений следует, что для малых углов атаки  $\dot{\varphi}_n = \omega_x - \dot{\gamma}_a$ , поэтому данные случаи соответствуют двум зна-

чениям для скорости собственного вращения:

$$\dot{\varphi}_n = \omega_x + \left( \omega - \frac{\bar{I}_x \omega_x}{2} \right), \quad \dot{\varphi}_n = \omega_x - \left( \omega + \frac{\bar{I}_x \omega_x}{2} \right).$$

Эти случаи можно трактовать как «быструю» и «медленную» прецессию тела.

Как видно (рис. 1.9 и выражение для  $\dot{\gamma}_a$  (1.46)), тип прецессии: «прямая» («медленная») или «обратная» («быстрая»), который реализуется на начальном атмосферном участке движения тела, определяется значениями углов  $\alpha_m$  и  $\alpha_0$ , а следовательно, учитывая выражения (1.45), начальными значениями углов  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ : при  $\varphi_1 > \varphi_2$  реализуется «обратная» прецессия (при  $\varphi_2 = 0$  — «быстрая»), при  $\varphi_2 > \varphi_1$  — «прямая» прецессия (при  $\varphi_1 = 0$  — «медленная»).

### 1.7. Разделение движения. Малые параметры

Описание вращательного и поступательного движений тела при спуске в атмосфере требует совместного рассмотрения системы с шестью степенями свободы, что обусловлено их взаимовлиянием друг на друга. Так, величины аэродинамических моментов зависят от параметров поступательного движения — скоростного напора и чисел аэродинамического подобия ( $M$ ,  $Re$  и другие), а величины аэродинамических сил, определяющих поступательное движение тела, зависят от расположения тела относительно воздушного потока, то есть от углов атаки  $\alpha$  и скольжения  $\beta$ , или от пространственного угла атаки  $\alpha_n$  и угла аэродинамического крена (угла собственного вращения)  $\varphi_n$ . Найти точное аналитическое решение полной системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих движение тела при спуске в атмосфере, не представляется возможным, поэтому возникает потребность в поиске приближённых решений. В данном случае используются, как правило, методы теории возмущений, для непосредственного использования которых требуется выделить малые параметры в уравнениях движения, характеризующие возмущения.

Можно условно выделить три вида возмущений: возмущения, обусловленные медленным изменением во времени параметров поступательного движения по сравнению с изменением параметров вращательного движения; возмущения, вызванные действующими на тело малыми демпфирующими моментами и моментами сил вязкого взаимодействия; возмущения, вызванные малой инерционно-аэродинамической асимметрией. Если малость двух

последних видов возмущений определяется малостью некоторых безразмерных коэффициентов, то для первого вида возмущений требуется найти соответствующий критерий, характеризующий относительную медленность изменения параметров поступательного движения.

Рассмотрим задачу в наиболее простой постановке. Пусть тело обладает осевой симметрией, движение совершается на малых углах атаки, демпфирование отсутствует. Тогда система уравнений вращательного движения тела (1.39) сводится к одному уравнению

$$\ddot{\delta} - iR\dot{\delta} + \omega_a^2\delta = 0, \quad (1.47)$$

где  $\delta = \alpha_n \exp(i\gamma_a)$  — комплексный угол атаки,

$$\omega_a^2 = c_n^\alpha (\bar{x}_D - \bar{x}_T) \frac{qSl}{I}, \quad R = \frac{I_x \omega_x}{I}.$$

Произведя в уравнении (1.47) замену

$$\delta = \zeta \exp \frac{iRt}{2},$$

получим линейное уравнение маятникового типа

$$\ddot{\zeta} + \omega^2\zeta = 0,$$

где

$$\omega^2 = c_n^\alpha (\bar{x}_D - \bar{x}_T) \frac{qSl}{I} + \frac{R^2}{4}. \quad (1.48)$$

Как следует из (1.48), частота собственных колебаний тела  $\omega$  зависит от изменяющегося во времени скоростного напора  $q$ . Принято считать [30], что функция  $\omega(t)$  медленно меняется во времени, если выполняется следующее условие:

$$|T\dot{\omega}| \ll |\omega|,$$

где  $T = 2\pi/\omega$  — период движения системы.

Перепишем это соотношение в виде

$$|\nu| = \left| \frac{T\dot{\omega}}{\omega} \right| \ll 1. \quad (1.49)$$

Условие (1.49) является критерием медленности изменения частоты собственных колебаний тела  $\omega$ , а следовательно критерием применимости асимптотических методов для задачи спуска.

Найдём оценку параметра  $\nu$  для верхнего участка траектории спуска. Аппроксимируя зависимость плотности от высоты  $\rho(H)$



экспонентой  $\rho = \rho(t_0)e^{-\lambda[H-H(t_0)]}$ , перепишем выражение для частоты собственных колебаний (1.48) в виде

$$\omega^2 = a_0 \exp(\beta t) + \frac{R_0^2}{4},$$

где

$$a_0 = \frac{c_n^\alpha(\bar{x}_D - \bar{x}_T)Sl}{2I} V_0^2 \rho(t_0), \quad \beta = \lambda V_0 |\sin \vartheta_0|,$$

$V_0$  — скорость полёта,  $\vartheta_0$  — угол наклона траектории,  $\lambda$  — логарифмический градиент плотности атмосферы по высоте.

Дадим верхнюю оценку критерию применимости асимптотических методов. Полагая числитель в формуле (1.49) максимально возможным:  $T\dot{\omega} = \pi\beta$ , а знаменатель минимально возможным:  $\omega = |R_0|/2$ , имеем следующее выражение для критерия применимости асимптотических методов:

$$\nu = \frac{2\pi\lambda V_0 |\sin \vartheta_0|}{|R_0|} \ll 1, \quad (1.50)$$

или, учитывая, что в случае малых углов атаки  $|R_0| \approx Q_0/I$  ( $Q_0$  — начальное значение модуля вектора кинетического момента),

$$\nu = \frac{2\pi I \lambda V_0 |\sin \vartheta_0|}{Q_0} \ll 1. \quad (1.51)$$

В дальнейшем, наряду с выражениями (1.50) и (1.51), в качестве критерия применимости асимптотических методов при исследовании движения на верхнем участке траектории спуска используется параметр  $\mu$  — обратный (с точностью до постоянного множителя) параметру  $\nu$  [43]:

$$\mu = \frac{2|R_0|}{\lambda V_0 |\sin \vartheta_0|} \gg 1 \quad (1.52)$$

или

$$\mu = \frac{2Q_0}{I \lambda V_0 |\sin \vartheta_0|} \gg 1. \quad (1.53)$$

## Глава 2

### НЕВОЗМУЩЁННОЕ ДВИЖЕНИЕ

Под возмущениями в задаче о движении тела вокруг центра масс в атмосфере (в отличие от возмущений по Ляпунову как отклонений решений при вариации начальных условий) понимаются возмущения в виде возникновения малых аэродинамических и инерционных моментов, а также возмущения, обусловленные наличием в системе медленно меняющихся параметров, связанных с движением центра масс.

Невозмущённым в дальнейшем будем называть движение идеального осесимметричного тела под действием только аэродинамического восстанавливающего момента при отсутствии возмущений ( $\varepsilon = 0$ ). Другими словами, демпфирующие моменты, моменты от сил вязкого взаимодействия и аэродинамические возмущающие моменты от асимметрии отсутствуют, инерционно-массовая асимметрия равна нулю, а параметры поступательного движения, в частности скоростной напор, неизменен ( $q = \text{const}$ ).

В главе рассмотрены уравнения невозмущённого движения и получены точные и приближённые аналитические решения для случаев, когда коэффициент восстанавливающего момента может быть аппроксимирован зависимостями  $a \sin \alpha_n$  или  $a \sin \alpha_n + b \sin 2\alpha_n$ . Нахождение решений и исследование невозмущённой системы требуется для построений приближённых решений уравнений возмущённого движения с помощью асимптотических методов. Кроме того, решения уравнений невозмущённого движения имеют и самостоятельное значение для ряда практических задач, например для задачи о движении авиационного пушечного снаряда относительно центра масс [35].

Найдены аналитические формулы для интеграла действия, которые весьма эффективно можно использовать для анализа возмущённого движения. Интеграл действия является первым интегралом невозмущённой системы и в некоторых частых случаях представляет собой адиабатический инвариант возмущённой системы [21, 22].

Для упрощения записи формул будем опускать нижние индексы при обозначении пространственного угла атаки  $\alpha_n$ , угла аэродинамического крена  $\varphi_n$  и угла скоростного крена  $\gamma_a$ .

## 2.1. Уравнения невозмущённого движения

Уравнения невозмущённого движения совпадают с уравнениями движения «висячего» волчка Лагранжа с обобщённым восстанавливающим моментом  $M_\alpha(\alpha)$  в виде нечётной периодической функции пространственного угла атаки (угла нутации). При  $\varepsilon = 0$  система уравнений возмущённого движения (1.30) является консервативной и имеет вид

$$\ddot{\alpha} + \frac{(R - G \cos \alpha)(G - R \cos \alpha)}{\sin^3 \alpha} - M_\alpha(\alpha) = 0, \quad (2.1)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{R}{I_x} - \frac{(G - R \cos \alpha) \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}, \quad \dot{\gamma} = \frac{G - R \cos \alpha}{\sin^2 \alpha},$$

где  $R, G$  — постоянные коэффициенты.

Очевидно, что уравнение для пространственного угла атаки интегрируется независимо от двух других уравнений системы (2.1) и при известном общем решении этого уравнения два остальных уравнения интегрируются в квадратурах.

Классический случай Лагранжа движения твёрдого тела вокруг неподвижной точки имеет место, когда восстанавливающий момент  $M_\alpha$  пропорционален синусу пространственного угла атаки (углу нутации). Общее решение для угла нутации известно и выражается через эллиптические функции Якоби [38]. Для «висячего» волчка Лагранжа это решение представлено в [2].

При достаточно сложной геометрической конфигурации тела его аэродинамические характеристики, к которым относится и коэффициент восстанавливающего момента  $m_\alpha = m^\circ + \bar{x}_{TCn}$ , определяются экспериментальным или расчётным путём. Ввиду сложности физико-механических процессов взаимодействия набегающего потока с поверхностью добиться удовлетворительной точности результатов расчёта аэродинамических характеристик обычно удаётся лишь за счёт использования различных эмпирических сведений, основанных на результатах многочисленных экспериментов. Как правило, это сужает область применимости соответствующих расчётных методик и затрудняет их использование в случае недостаточной информации о конкретных условиях движения.

Одним из наиболее универсальных методов определения аэродинамических характеристик является метод, основанный на ударной теории Ньютона [15]. Его суть состоит в том, что вычисление аэродинамических коэффициентов осуществляется путём интегрирования динамического давления по незатенённой внешней поверхности тела. При этом считается, что соударение частиц газа с телом носит неупругий характер, т. е. происходит гашение нормальной к поверхности составляющей количества движения потока. Метод Ньютона находит особенно широкое применение в тех случаях, когда аппарат имеет несложную конфигурацию, а скорость полёта достаточно велика и обеспечивает гиперзвуковое обтекание ( $M > 6$ ). Он может быть эффективно использован для приближённых аэродинамических расчётов на ранних этапах формирования облика и проектирования космического аппарата.

Внешняя геометрическая компоновка неуправляемых спускаемых аппаратов, совершающих на большей части траектории полёт в атмосфере с гиперзвуковой скоростью, как правило, описывается несложной комбинацией элементарных пространственных тел. В качестве примеров можно привести спускаемые модули таких космических аппаратов, как «Союз», «Фотон», «Венера», «Марс», «Аполлон», «Викинг» и др., имеющие сегментально-коническую форму. Для них и аналогичных аппаратов метод Ньютона даёт удовлетворительную точность определения аэродинамических характеристик.

Для возможности дальнейшего преобразования системы уравнений движения (например, усреднения) необходимо найти аналитическое представление зависимостей аэродинамических коэффициентов от пространственного угла атаки  $\alpha$ . В связи с этим часто прибегают к аппроксимации аэродинамических характеристик степенными или тригонометрическими рядами. Если аэродинамические характеристики задаются на всём интервале возможных значений угла атаки  $[0, \pi]$ , то целесообразнее использовать тригонометрические ряды. Как было отмечено в параграфе 1.1, зависимость  $c_\tau(\alpha)$  является чётной, а зависимости  $c_n(\alpha)$ ,  $m_\alpha(\alpha)$  — нечётными, и их представления в виде отрезков рядов Фурье содержат члены соответственно по косинусам или по синусам:

$$c_\tau(\alpha) = \sum_{i=0}^n b_i^{(C_\tau)} \cos i\alpha, \quad c_n(\alpha) = \sum_{i=1}^n b_i^{(C_n)} \sin i\alpha, \quad (2.2)$$



Таблица 2.2. Значения коэффициентов  $k_{ij}$  для нечётных рядов

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1
1	-	2	0	-4	0	6	0	-8	0
2	-	-	4	0	-12	0	24	0	-40
3	-	-	-	8	0	-32	0	80	0
4	-	-	-	-	16	0	-80	0	240
5	-	-	-	-	-	32	0	-192	0
6	-	-	-	-	-	-	64	0	-448
7	-	-	-	-	-	-	-	128	0
8	-	-	-	-	-	-	-	-	256

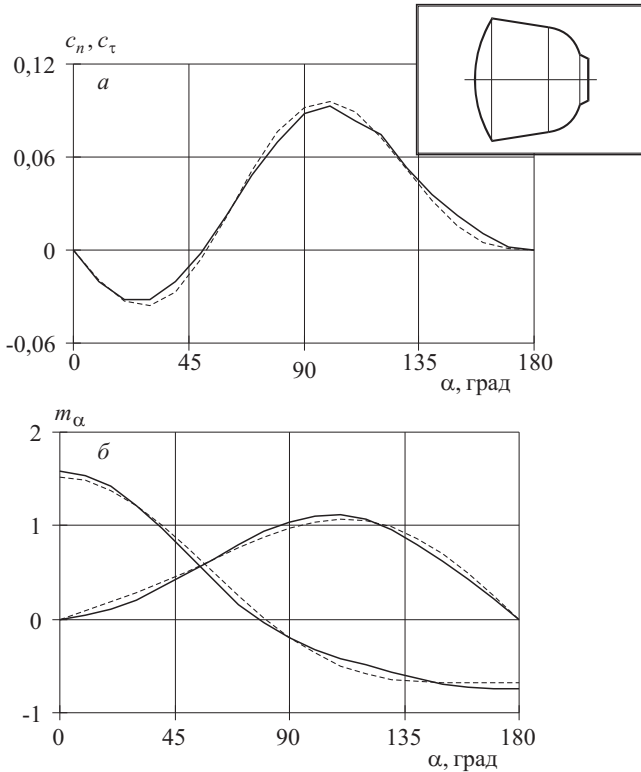


Рис. 2.1. Аппроксимация аэродинамических характеристик тела сегментально-конической формы

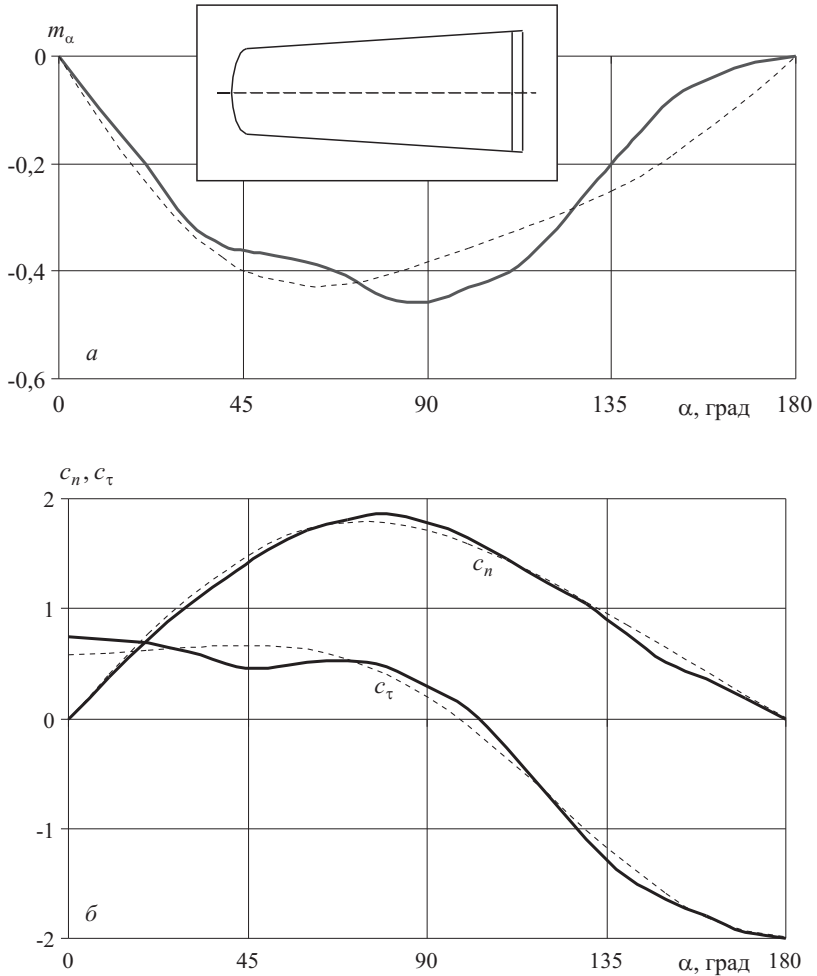


Рис. 2.2. Аппроксимация аэродинамических характеристик для тела вытянутой конической формы

Как показывают расчёты гиперзвуковых аэродинамических характеристик, выполненные по методу Ньютона, для различных типов спускаемых аппаратов, в случае несложной геометрической формы их внешней поверхности при отсутствии крупных конструктивных элементов, нарушающих осевую симметрию, зависимости  $m_\alpha(\alpha)$ ,  $c_\tau(\alpha)$ ,  $c_n(\alpha)$  являются достаточно гладкими, так что при их аппроксимации можно ограничиваться двумя — тремя гармониками в рядах (2.2), (2.3). На рис. 2.1, 2.2 показаны

два осесимметричных тела сегментально-конической и вытянутой конической формы и приведены примеры аппроксимации их экспериментальных аэродинамических характеристик (сплошные линии) рядами Фурье (пунктирные линии). Для первого тела (рис. 2.1) получаются следующие первые члены разложения:

$$m_\alpha(\alpha) = 0.0544 \sin \alpha - 0.0296 \sin 2\alpha - 0.0326 \sin 3\alpha,$$

$$c_\tau(\alpha) = 0.1133 + 1.0928 \cos \alpha + 0.3083 \cos 2\alpha + 0.0129 \cos 3\alpha,$$

$$c_n(\alpha) = 0.9769 \sin \alpha - 0.2405 \sin 2\alpha + 0.0096 \sin 3\alpha,$$

а для второго (рис. 2.2)

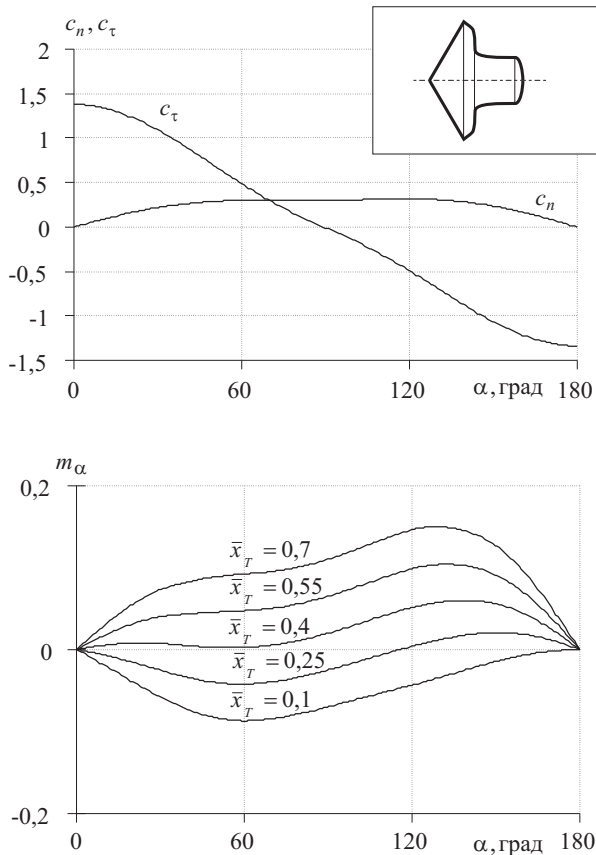


Рис. 2.3. Зависимость аэродинамических коэффициентов от угла атаки для спускаемого аппарата «Марс»



$$m_{\alpha}(\alpha) = -0.4201 \sin \alpha - 0.0729 \sin 2\alpha - 0.0373 \sin 3\alpha,$$

$$c_{\tau}(\alpha) = -0.2507 + 1.2927 \cos \alpha - 0.4484 \cos 2\alpha - 0.0083 \cos 3\alpha,$$

$$c_n(\alpha) = 1.7225 \sin \alpha + 0.2657 \sin 2\alpha + 0.0127 \sin 3\alpha.$$

Зависимости аэродинамических коэффициентов от пространственного угла атаки для различных типов спускаемых аппаратов, рассчитанные по ударной теории Ньютона [15], показаны на рис. 2.3–2.10.

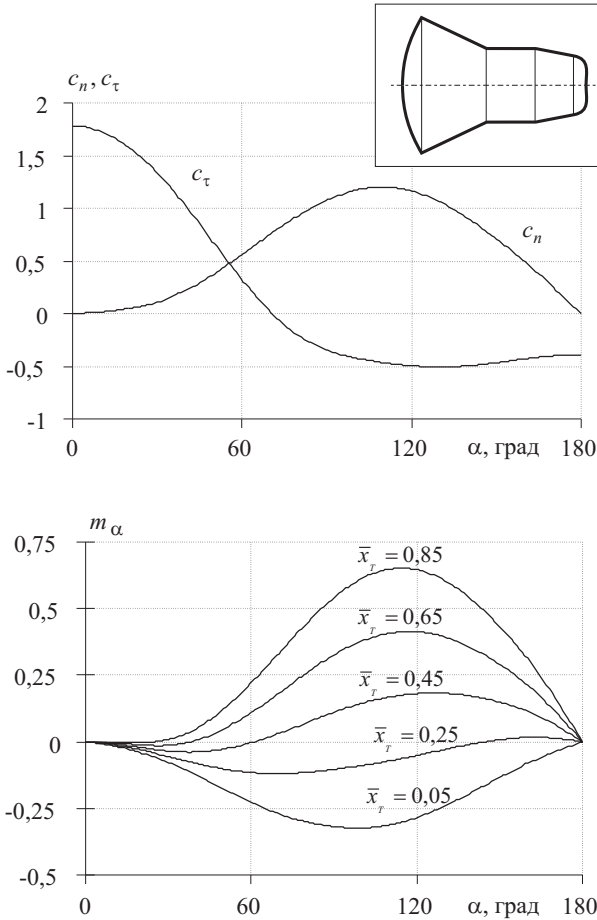


Рис. 2.4. Зависимость аэродинамических коэффициентов от угла атаки для спускаемого аппарата «Джемени»

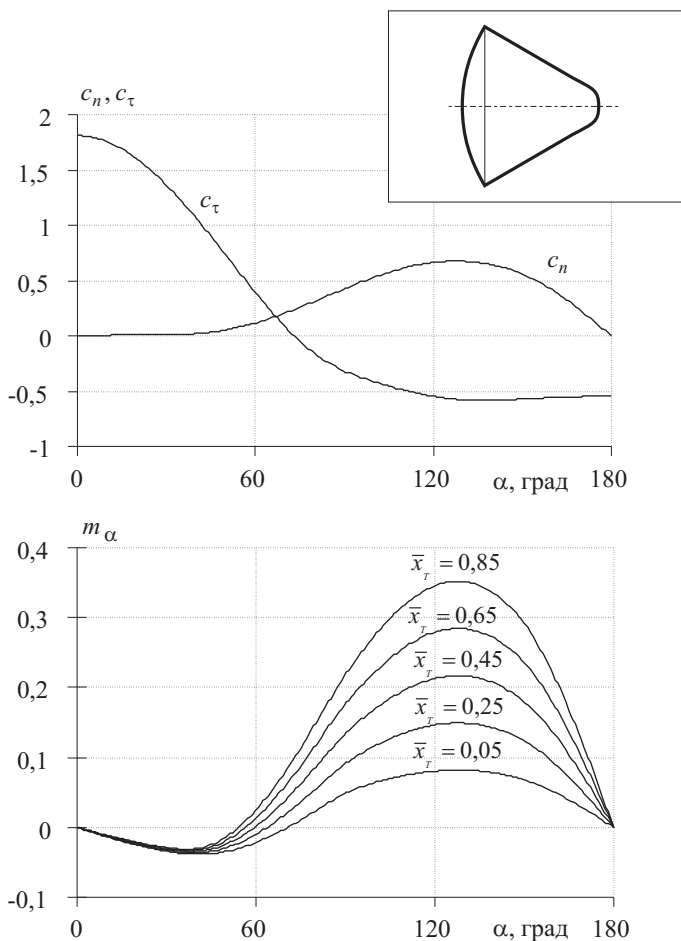


Рис. 2.5. Зависимость аэродинамических коэффициентов от угла атаки для спускаемого аппарата «Аполлон»

При перемещении точки приведения момента зависимость  $m_\alpha(\alpha)$ , а, следовательно, и соответствующий аппроксимирующий ряд (2.3) остаются нечётными, изменяются только значения коэффициентов  $b_i$ . На рис. 2.11 показаны примеры зависимости  $m_\alpha(\alpha)$  для различных положений точки приведения, задаваемых относительным расстоянием от носка  $\bar{x}_T = x_T/L$ , а в табл. 2.3 приведены соответствующие значения коэффициентов  $b_i$ .

Из рис. 2.11 видно, что при определённых значениях  $\bar{x}_T$  возникают устойчивые и неустойчивые промежуточные положения

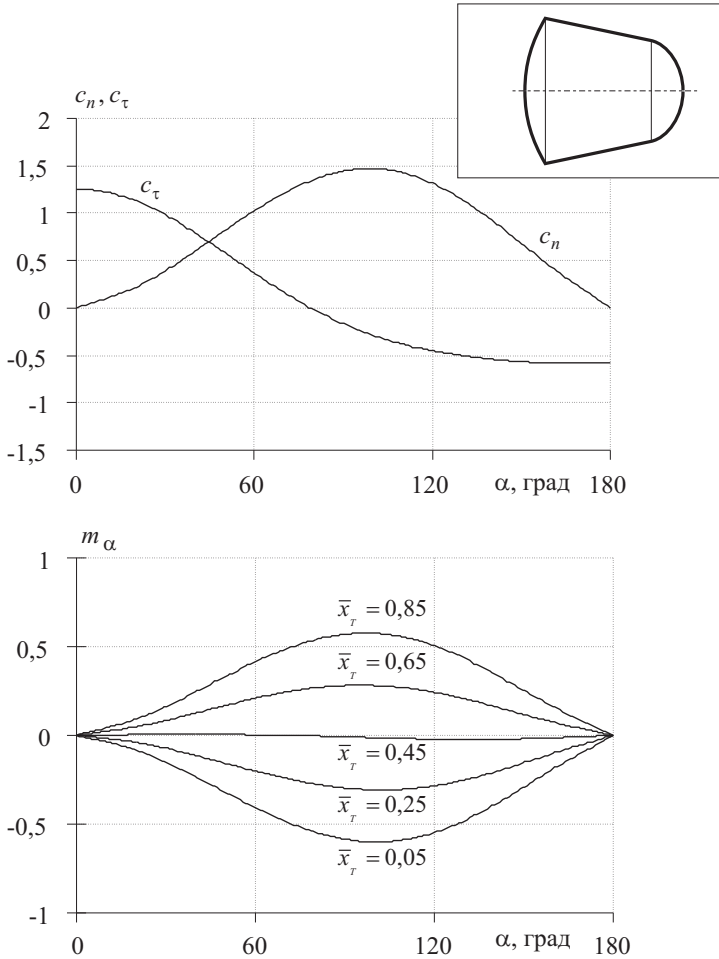


Рис. 2.6. Зависимость аэродинамических коэффициентов от угла атаки для спускаемого аппарата «ЭКО-НХ»

Таблица 2.3. Значения коэффициентов  $b_i$  в формуле (2.3)

$\bar{x}_T$	0.33	0.37	0.41	0.45	0.49
$b_1$	-0.1019	-0.0629	-0.0238	0.0153	0.0544
$b_2$	0.0088	-0.0008	-0.0104	-0.0200	-0.0296
$b_3$	-0.0218	-0.0245	-0.0272	-0.0299	-0.0326
$b_4$	-0.0009	-0.0009	-0.0009	-0.0009	-0.0009

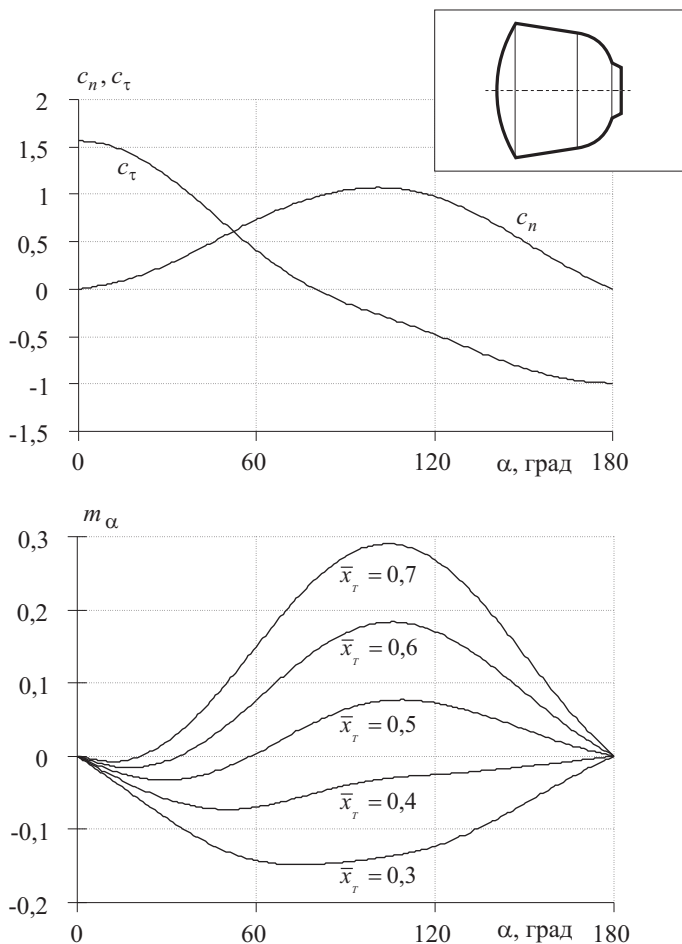


Рис. 2.7. Зависимость аэродинамических коэффициентов от угла атаки для спускаемого аппарата «Союз»

равновесия между  $\alpha = 0^\circ$  и  $\alpha = 180^\circ$ . Учёт промежуточных положений равновесия представляется достаточно важным, поскольку этот фактор может оказывать существенное влияние на характер движения тела. Очевидно, что для тел, имеющих промежуточное положение равновесия, аппроксимирующий ряд (2.3) должен содержать не менее двух гармоник.

Рассмотрим первое уравнение системы (2.1) и перепишем его в виде

$$\ddot{\alpha} + F(\alpha) = 0. \quad (2.6)$$

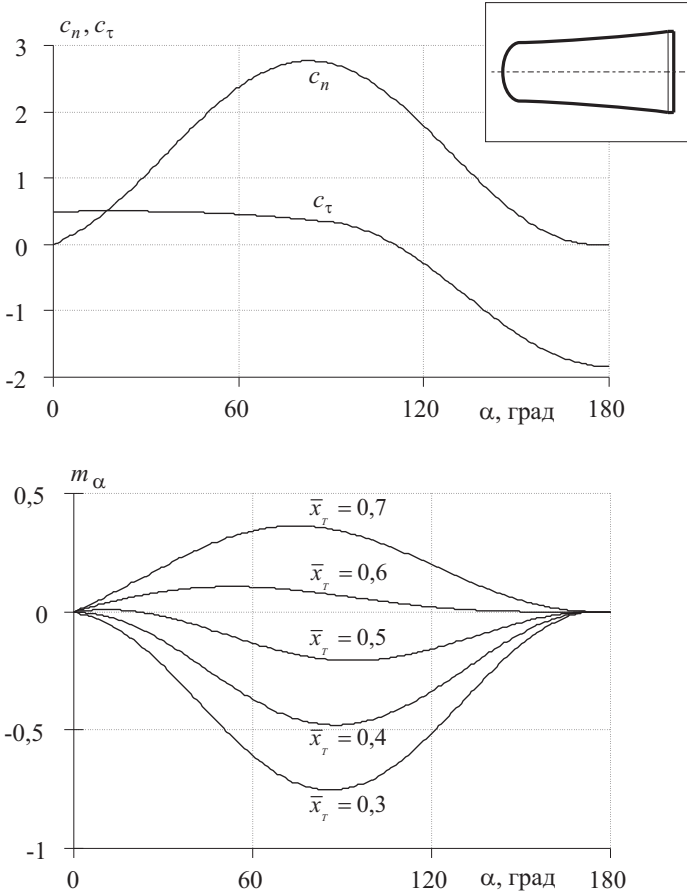


Рис. 2.8. Зависимость аэродинамических коэффициентов от угла атаки для спускаемого аппарата конической формы

Функция  $F(\alpha)$  с учётом разложения восстанавливающего момента (2.5) запишется следующим образом:

$$F(\alpha) = \frac{(G - R \cos \alpha)(R - G \cos \alpha)}{\sin^3 \alpha} + q \sin \alpha \sum_{i=0}^{n-1} c_i \cos^i \alpha. \quad (2.7)$$

Уравнение (2.6) имеет интеграл энергии

$$E = \frac{\dot{\alpha}^2}{2} + W(\alpha) = h = \text{const}, \quad (2.8)$$

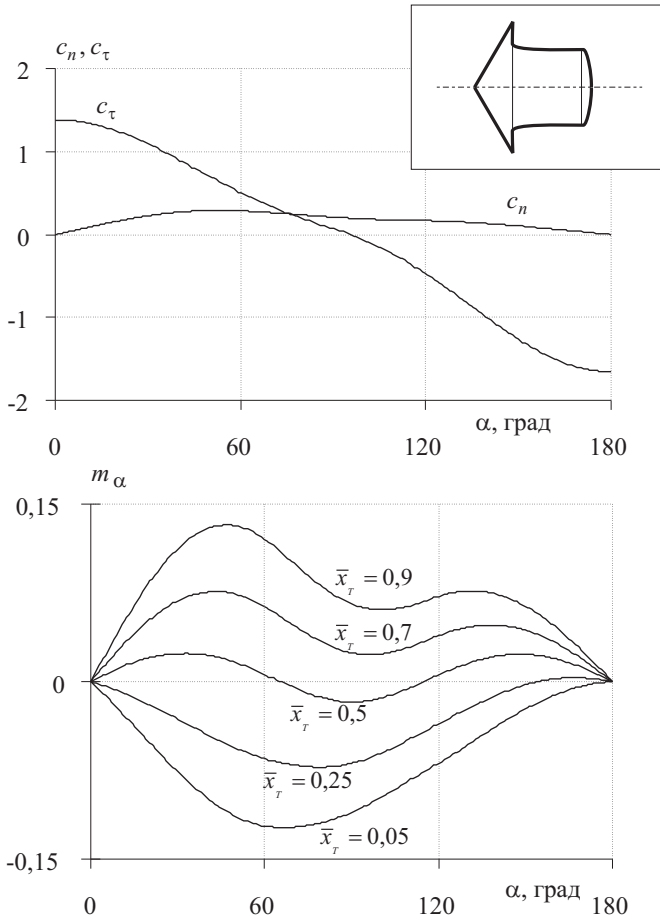


Рис. 2.9. Зависимость аэродинамических коэффициентов от угла атаки для спускаемого аппарата «Викинг»

где

$$W(\alpha) = \int F(\alpha) d\alpha = \frac{G^2 + R^2 - 2GR \cos \alpha}{2 \sin^2 \alpha} - q \sum_{i=0}^{n-1} \frac{c_i}{i+1} \cos^{i+1} \alpha. \quad (2.9)$$

Чтобы исключить в (2.9) тригонометрические функции, целесообразно перейти к новой переменной  $u$  посредством замены

$$u = \cos \alpha, \quad \dot{u} = -\dot{\alpha} \sin \alpha. \quad (2.10)$$

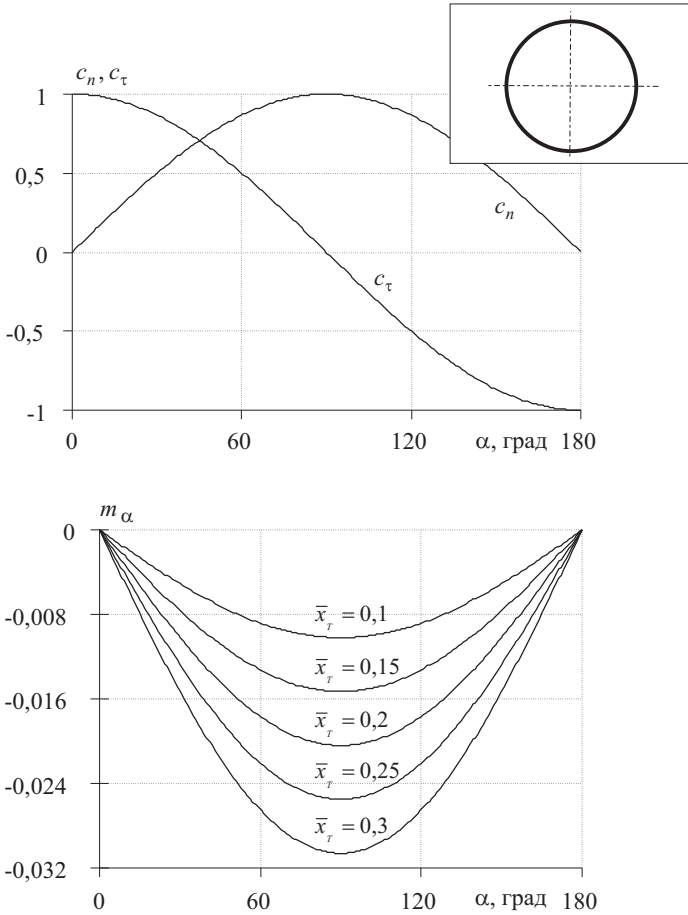


Рис. 2.10. Зависимость аэродинамических коэффициентов от угла атаки для спускаемого аппарата «Фотон»

Значениям угла  $\alpha$  из интервала  $[0, \pi]$  взаимно однозначно соответствуют значения переменной  $u$  на интервале  $[-1, +1]$ . С учётом замены (2.10) уравнение (2.8) можно записать в виде

$$\dot{u}^2 = f(u), \quad (2.11)$$

где

$$f(u) = 2(1 - u^2) \left[ h + q \sum_{i=0}^{n-1} \frac{c_i}{i+1} u^{i+1} \right] + 2GRu - G^2 - R^2. \quad (2.12)$$

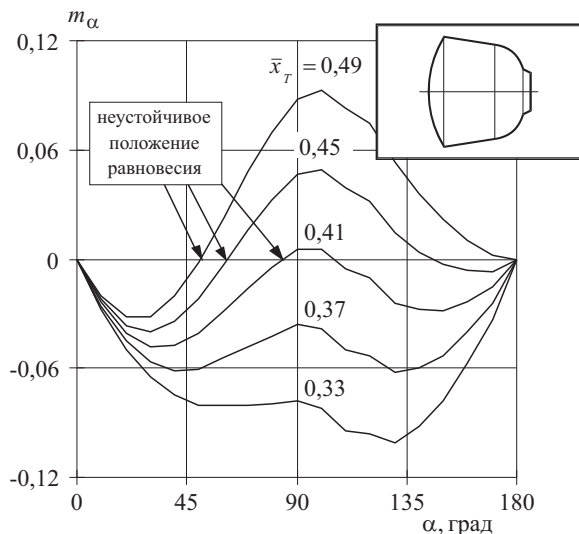


Рис. 2.11. Зависимость коэффициента восстанавливающего момента от угла атаки для аппарата сегментально-конической формы

Разделив переменные в уравнении (2.11) и проинтегрировав его, получим

$$t - t_0 = \pm \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{f(u)}}. \quad (2.13)$$

Как видно из (2.12), полином  $f(u)$  имеет степень не выше  $(n + 2)$ . При условии, что  $n \leq 2$  интеграл в правой части (2.13) относится к семейству эллиптических и с помощью известных приёмов может быть выражен через нормальные эллиптические интегралы [42]. Ниже будут рассмотрены случаи  $n = 1$  и  $n = 2$ .

## 2.2. Общие решения уравнений движения тела с синусоидальной зависимостью восстанавливающего момента от угла атаки

Если тело имеет форму сферы или тонкого конуса, то его моментная характеристика описывается синусоидальной зависимостью от угла атаки [15]:

$$M_\alpha(\alpha, z) = -qc_0 \sin \alpha = a(z) \sin \alpha. \quad (2.14)$$



Будем рассматривать только статически устойчивые тела, когда

$$a = \left( \frac{\partial M_\alpha}{\partial \alpha} \right) \Big|_{\alpha=0} < 0.$$

С учётом (2.14) представим уравнение (2.11) в виде полинома третьей степени по степеням  $u$ :

$$\dot{u}^2 = 2au^3 - 2hu^2 - 2(a - RG)u + (2h - R^2 - G^2) = f(u). \quad (2.15)$$

Функция  $u$  изменяется периодически между двумя корнями кубического уравнения

$$f(u) = 0. \quad (2.16)$$

Для больших положительных значений  $u$  функция  $f(u)$  является отрицательной величиной и наоборот, для больших отрицательных значений  $u$  функция  $f(u)$  является положительной величиной. При  $u = -1$  функция  $f(u) = -(G + R)^2 \leq 0$ . Следовательно, по крайней мере один из корней уравнения (2.16) меньше или равен  $-1$ , назовём этот корень  $u_3$  (рис. 2.12). Физическое движение реализуется только в том случае, когда  $\dot{u}^2 > 0$ , а поскольку  $u = \cos \alpha$ , то два остальных корня кубического уравнения (2.16) лежат в пределах  $-1 \leq u_2 \leq u_1 \leq 1$ . Корень  $u_1$  соответствует минимальному значению угла  $\alpha$ , а корень  $u_2$  — максимальному ( $u_1 = \cos \alpha_{\min}$ ,  $u_2 = \cos \alpha_{\max}$ ).

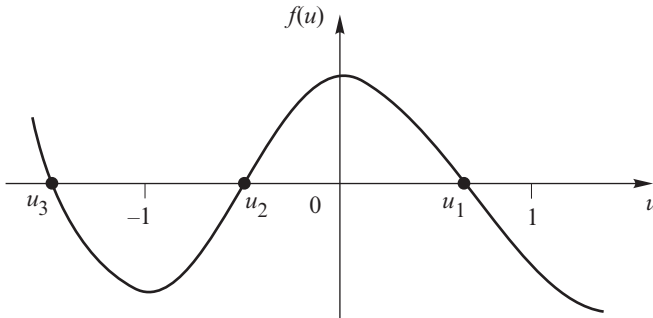


Рис. 2.12. Расположение корней полинома  $f(u)$

Введём в интеграле (2.13) замену переменных

$$u = u_1 \cos^2 \nu + u_2 \sin^2 \nu \quad (2.17)$$

и будем считать, что начальному моменту времени  $t_0$  соответствует значение  $u = u_2$ . В результате чего интеграл (2.13) можно

представить в виде

$$\beta(t - t_0) = \int_{\pi/2}^{\nu} \frac{d\nu}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \nu}} = F(\nu, k) - K(k), \quad (2.18)$$

где  $k^2 = (u_1 - u_2)/(u_1 - u_3) \leq 1$  — модуль эллиптических функций,

$$\beta = \sqrt{-\frac{a(u_1 - u_3)}{2}},$$

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\nu}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \nu}}, \quad F(\nu, k) = \int_0^{\nu} \frac{d\nu}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \nu}}$$

— полный и неполный эллиптические интегралы первого рода [42].

Перепишем выражение (2.18) с помощью амплитуды-функции Якоби [42]

$$\nu = am[\beta(t - t_0) + K, k]$$

и подставим его в формулу (2.17). После элементарных преобразований имеем общее решение для угла нутации в виде

$$\cos \alpha = (u_1 - u_2)cn^2[\beta(t - t_0) + K, k] + u_2, \quad (2.19)$$

где  $cn[...]$  — эллиптический косинус.

Из решения (2.19) следует, что период угла атаки равен

$$T = \frac{2K}{\beta}.$$

Связь между корнями уравнения (2.16), входящими в общее решение (2.19), и постоянными из выражения (2.15) однозначно определяется посредством инвариантов кубического уравнения [18]

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + u_3 &= \frac{h}{a}, & u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_2 u_3 &= \frac{RG}{a} - 1, \\ u_1 u_2 u_3 &= \frac{R^2 + G^2 - 2h}{2a}. \end{aligned}$$

Если в этих соотношениях в качестве независимого параметра вместо постоянной  $h$  выбрать один из корней, например,  $u_2 = \cos \alpha_{\max}$ , то два остальных корня можно выразить с помощью формул [11]:

$$u_1 = \cos \alpha_{\min} = \eta - \frac{c - bu_2}{1 - u_2^2}, \quad (2.20)$$

$$u_3 = -\eta - \frac{c - bu_2}{1 - u_2^2}, \quad (2.21)$$

$$\eta = \sqrt{1 - 2\frac{cu_2 - b}{1 - u_2^2} + \left(\frac{c - bu_2}{1 - u_2^2}\right)^2}, \quad (2.22)$$

где

$$c = \frac{R^2 + G^2}{-4a}, \quad b = \frac{RG}{-2a}.$$

Причём постоянная энергия  $h$  вычисляется по формуле

$$h = \frac{R^2 + G^2 - 2RGu_2}{2(1 - u_2^2)} + au_2.$$

С учётом соотношений (2.20)–(2.22) формулы для модуля  $k$  и частоты  $\beta$  переписутся в виде

$$k^2 = \frac{u_1 - u_2}{2\eta}, \quad \beta = \sqrt{-a\eta}.$$

Решение (2.19) можно существенно упростить, если воспользоваться аппроксимацией эллиптического косинуса тригонометрическими функциями [42]

$$cnz \approx \cos y(1 - p \sin^2 y), \quad (2.23)$$

где

$$p = 2\frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}}, \quad k' = \sqrt{1 - k^2}, \quad y = \frac{\pi z}{2K}.$$

Точность аппроксимации (2.23) уменьшается с увеличением модуля  $k$ . Так, при  $k = 0.7$  абсолютная погрешность не более 0.005, при  $k = 0.9$  погрешность не превышает 0.015, что соответствует для плоского случая движения ( $R = 0$ ,  $G = 0$ ) следующим амплитудным значениям угла нутации:  $90^\circ$  и  $130^\circ$ . Подставим формулу (2.23) в решение (2.19) и в результате получим приближённое решение для пространственного угла атаки:

$$\cos \alpha = B(1 - \cos y)(m - \cos y)^2 + u_2, \quad (2.24)$$

где

$$y = \pi\beta\frac{t - t_0}{K}, \quad B = \frac{(u_1 - u_2)p^2}{8}, \quad m = \frac{2 - p}{p}.$$

На рис. 2.13 показано сравнение точного аналитического решения (2.19) и приближённого решения (2.24) при различных значениях модуля  $k$ .

Решение (2.24) можно ещё более упростить для случаев, когда движение тела происходит с малыми углами атаки. То-

гда можно считать, что модуль  $k \rightarrow 0$ , дополнительный модуль  $k' \rightarrow 1$ , а параметр  $p \rightarrow 0$ . Решение примет вид

$$\cos \alpha = \frac{(u_1 + u_2)}{2} + \frac{(u_2 - u_1)}{2} \cos y.$$

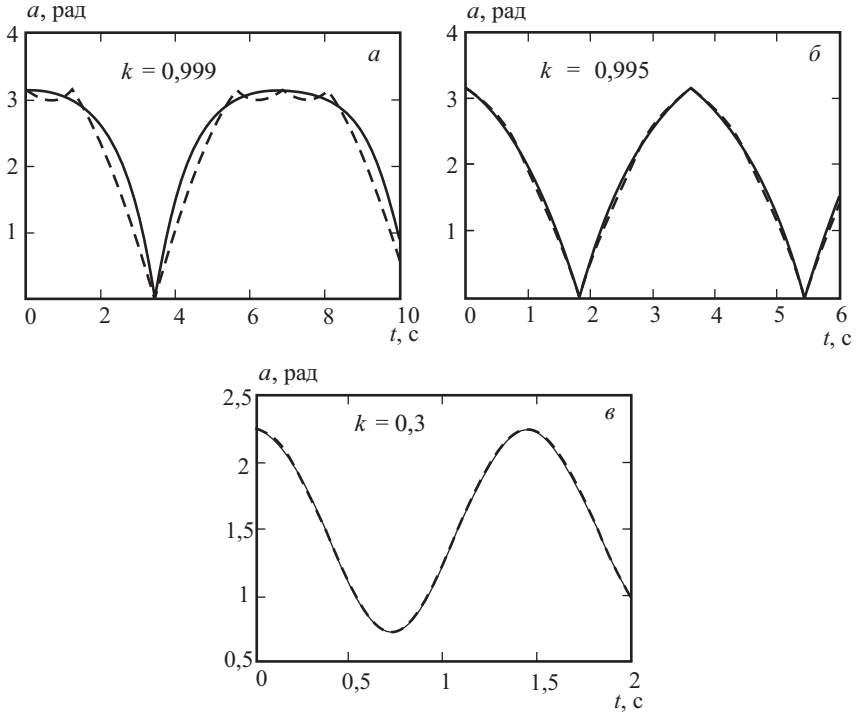


Рис. 2.13. Сравнение точного аналитического (сплошная линия) и приближённого (штриховая линия) решений

При известном общем решении для угла атаки (2.19) решения для углов аэродинамического крена (собственного вращения) и скоростного крена (прецессии) могут быть найдены путём обычного взятия квадратур [12]. Правые части уравнений для этих углов

$$\dot{\varphi} = \frac{R}{I_x} - \frac{(G - R \cos \alpha) \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} = F_{\varphi}(\alpha), \quad \dot{\gamma} = \frac{G - R \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} = F_{\gamma}(\alpha)$$

разложим на простейшие дроби по  $\cos \alpha$ :

$$F_{\varphi}(\alpha) = \left( \frac{1}{I_x} - 1 \right) R + \frac{1}{2} \left( \frac{R + G}{1 + \cos \alpha} + \frac{R - G}{1 - \cos \alpha} \right), \quad (2.25)$$

$$F_\gamma(\alpha) = \frac{1}{2} \left( \frac{R+G}{1+\cos\alpha} - \frac{R-G}{1-\cos\alpha} \right). \quad (2.26)$$

С учётом общего решения (2.19) проинтегрируем по времени следующие выражения, входящие в (2.25) и (2.26) (не нарушая общности, будем считать  $t_0 = 0$ ):

$$I_\pm = \int_0^t \frac{dt}{1 \pm \cos\alpha} = \int_0^t \frac{dt}{1 \pm (u_1 - u_2)cn^2(\beta t + K, k) + u_2}.$$

Тогда квадратуры для углов  $\varphi$  и  $\gamma$  можно представить в виде

$$\varphi - \varphi_0 = \int_0^t F_\varphi[\alpha(t)] dt = \left( \frac{1}{I_x} - 1 \right) Rt + \frac{1}{2} [(R+G)I_+ + (R-G)I_-],$$

$$\gamma - \gamma_0 = \int_0^t F_\gamma[\alpha(t)] dt = \frac{1}{2} [(R+G)I_+ - (R-G)I_-].$$

Для вычисления интегралов  $I_\pm$  воспользуемся заменой переменной:

$$\xi = am(\beta t + K, k), \quad dt = \frac{1}{\beta} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \xi}},$$

в результате получим

$$I_- = \frac{1}{\beta(u_1 - u_2)} n_1 [\Pi(\xi, n_1, k) - \Pi(n_1, k)],$$

$$I_+ = -\frac{1}{\beta(u_1 - u_2)} n_2 [\Pi(\xi, n_2, k) - \Pi(n_2, k)],$$

где

$$\Pi(\xi, n, k) = \int_0^\xi \frac{d\xi}{(1 + n \sin^2 \xi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \xi}}, \quad \Pi(n, k) = \Pi\left(\frac{\pi}{2}, n, k\right)$$

— неполный и полный эллиптические интегралы третьего рода в нормальной форме Лежандра,  $n$  — параметр эллиптического интеграла третьего рода,

$$n_1 = \frac{u_1 - u_2}{1 - u_1}, \quad n_2 = -\frac{u_1 - u_2}{1 + u_1}.$$

Окончательно запишем формулы для угла аэродинамического крена (собственного вращения) и угла скоростного крена (прецессии) в следующем виде:

$$\varphi - \varphi_0 = \left( \frac{1}{\bar{I}_x} - 1 \right) Rt + \frac{1}{2\beta(u_1 - u_2)} \{ (R - G)n_1 [\Pi(\xi, n_1, k) - \Pi(n_1, k)] - (R + G)n_2 [\Pi(\xi, n_2, k) - \Pi(n_2, k)] \}, \quad (2.27)$$

$$\gamma - \gamma_0 = \frac{1}{2\beta(u_1 - u_2)} \{ -(R - G)n_1 [\Pi(\xi, n_1, k) - \Pi(n_1, k)] - (R + G)n_2 [\Pi(\xi, n_2, k) - \Pi(n_2, k)] \}. \quad (2.28)$$

Таким образом, для синусоидального восстанавливающего момента получены аналитические зависимости углов Эйлера от времени для невозмущённого случая движения (случай Лагранжа), которые будут использованы при построении усреднённых уравнений возмущённого движения.

### 2.3. Особенности движения тела с бигармонической характеристикой восстанавливающего момента

Для тел сегментально-конической, затуплённо-конической форм (спускаемые модули «Союз», «Марс», «Аполлон», «Викинг» и др.) возможно наличие трёх балансировочных положений по углу атаки (рис. 2.1). Очевидно, что в этом случае для удовлетворительной аппроксимации зависимости восстанавливающего момента от угла атаки необходимо удерживать не менее двух гармоник тригонометрического ряда в разложении (2.5)

$$M_\alpha(\alpha, z) = -qc_0 \sin \alpha - qc_1 \sin \alpha \cos \alpha$$

или

$$M_\alpha(\alpha, z) = a(z) \sin \alpha + b(z) \sin 2\alpha. \quad (2.29)$$

Зависимость (2.29) в дальнейшем будем называть бигармонической моментной характеристикой. На знаки медленно меняющихся коэффициентов  $a(z)$  и  $b(z)$  никаких ограничений не накладывает (момент  $M_\alpha(\alpha, z)$  может быть как собственно восстанавливающим, так и опрокидывающим). Следует отметить, что при  $b = 0$ ,  $a > 0$  ( $a = \text{const}$ ), уравнение (2.1) описывает движение тяжёлого твёрдого тела в случае Лагранжа в классической постановке [38].

Рассмотрим характерные особенности движения, возникающие в результате учёта второй гармоники, для этого воспользуемся уравнением невозмущённого движения вида

$$\ddot{\alpha} + F(\alpha) = 0, \quad (2.30)$$

где

$$F(\alpha) = \frac{(R - G \cos \alpha)(G - R \cos \alpha)}{\sin^3 \alpha} - a \sin \alpha - b \sin 2\alpha. \quad (2.31)$$

Уравнение (2.30) имеет интеграл энергии

$$\frac{\dot{\alpha}^2}{2} + W(\alpha) = E, \quad (2.32)$$

$$W(\alpha) = \int F(\alpha) d\alpha = W_g(\alpha) + W_r(\alpha),$$

где

$$W_g(\alpha) = \frac{G^2 + R^2 - 2GR \cos \alpha}{2 \sin^2 \alpha}, \quad W_r(\alpha) = a \cos \alpha + b \cos^2 \alpha.$$

Значениям угла  $\alpha$  из интервала  $[0, \pi]$  взаимно однозначно соответствуют значения переменной  $u = \cos \alpha$  на интервале  $[-1, +1]$ . С учётом замены (2.10) уравнение (2.32) можно записать в виде

$$\frac{\dot{u}^2}{2(1 - u^2)} + W(u) = E, \quad (2.33)$$

$$W(u) = W_g(u) + W_r(u),$$

где

$$W_g(u) = \frac{G^2 + R^2 - 2GRu}{2(1 - u^2)}, \quad W_r(u) = au + bu^2.$$

Характер фазового портрета системы, описываемой уравнением (2.33), определяется формой зависимости  $W(u)$ . В частности, от количества и расположения экстремумов этой функции зависит число и тип особых точек. Каждому минимуму соответствует устойчивая точка типа центра, а каждому максимуму — неустойчивая точка типа седла (рис. 2.14). Исследуем поведение функции  $W(u) = W_g(u) + W_r(u)$  при различных сочетаниях параметров  $R$ ,  $G$ ,  $a$ ,  $b$ . Продифференцируем функцию  $W_g(u)$  по переменной  $u$ :

$$W'_g(u) = \frac{(R^2 + G^2)u - RG(1 + u^2)}{(1 - u^2)^2}.$$

Числитель дроби имеет действительные взаимно обратные корни  $R/G$  и  $G/R$ , из которых только один принадлежит рас-

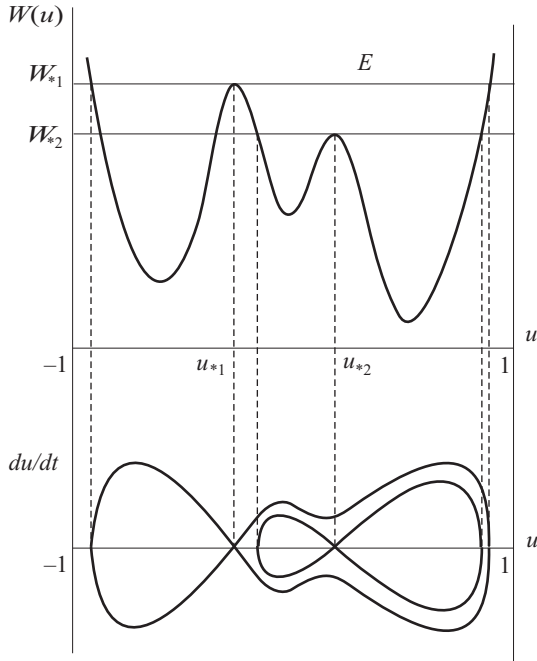


Рис. 2.14. Фазовый портрет консервативной системы

смаатриваемому интервалу  $[-1, +1]$ . Следовательно, существует единственный экстремум функции  $W_g(u)$ , причём этот экстремум, равный  $0.5 \max \{R^2, G^2\} \geq 0$ , очевидно, является минимумом. Анализируя вторую производную

$$W_g''(u) = \frac{(R^2 + G^2)(1 + 3u^2) - 2RGu(3 + u^2)}{(1 - u^2)^3}, \quad (2.34)$$

можно установить, что она, как и сама функция  $W_g(u)$ , всюду на интервале неотрицательна. Действительно, числитель имеет экстремумы в уже известных точках  $R/G$  и  $G/R$ , равные соответственно  $(G^2 - R^2)^2/R^2 \geq 0$  и  $(G^2 - R^2)^2/G^2 \geq 0$ , а на концах интервала  $u = \pm 1$  принимает значения  $4(G \mp R)^2 \geq 0$ . Отсюда следует вывод, что функция  $W_g(u)$  не имеет точек перегиба, а её производная монотонно возрастает на всём интервале.

Рассмотрим теперь квадратичную функцию  $W_r(u)$ . Она имеет экстремум в точке  $(-a/2b)$ , где её производная  $W_r'(u) = a + 2bu$  обращается в ноль. Вторая производная  $W_r''(u) = 2b$  является постоянной величиной. Из сказанного следует, что при выполнении



условия

$$b \geq - \left[ \min_{-1 \leq u \leq 1} (0.5W_g''(u)) \right] \equiv b^*, \quad (2.35)$$

вторая производная  $W''(u) = W_g''(u) + W_r''(u)$  неотрицательна, т. е. функция  $W(u)$  на рассматриваемом интервале не имеет точек перегиба. Это означает, что на фазовом портрете системы существует единственное устойчивое положение равновесия, а седловая особая точка отсутствует. Согласно (2.35) величина  $b^*$  всегда отрицательна. При  $R = G = 0$  функция  $W_g''(u)$  вырождается, поэтому  $b^* = 0$ , и условие (2.35) приобретает вид  $b \geq 0$ . Из (2.34) видно, что с увеличением абсолютных значений параметров  $R$  и  $G$  величина  $b^*$  уменьшается, т. е. условие (2.35) ослабляется.

Очевидно, седловая точка будет отсутствовать также при достаточно малой абсолютной величине коэффициента  $b$  (движение, близкое к случаю Лагранжа). Действительно, если

$$|b| \leq 0.5|a|, \quad (2.36)$$

то функция  $W_r''(u)$  на всём интервале имеет один и тот же знак, следовательно, производная  $W'(u) = W_g'(u) + W_r'(u)$  обращается в ноль в единственной точке, и функция  $W(u)$  имеет единственный экстремум — минимум.

Если ни одно из условий (2.35), (2.36) не выполняется, то возможно наличие двух минимумов и одного максимума функции  $W(u)$  на интервале  $[-1, +1]$ , что соответствует наличию на фазовом портрете неустойчивой особой точки типа седла (рис. 2.14). Указанная ситуация будет иметь место при выполнении условия

$$W'(u_{*1}) \cdot W'(u_{*2}) < 0, \quad (2.37)$$

где  $u_{*1}, u_{*2}$  — корни уравнения  $W''(u) = 0$ .

Из условия (2.36) вытекает, что если внутри интервала  $[0, \pi]$  седловая точка отсутствует в плоском случае ( $R = G = 0$ ), то она будет отсутствовать и в случае пространственных колебаний, независимо от величины параметров  $R$  и  $G$ . С другой стороны, если при  $R = G = 0$  седловая точка имеет место, то обеспечить её отсутствие для любых значений энергии  $E$  согласно (2.34), (2.35) можно выбором достаточно больших по модулю конечных  $R$  и  $G$ .

При выполнении условия (2.37) фазовая плоскость разбивается сепаратрисой на три области: внешнюю и две внутренних. Если  $E > W_*$ , где  $W_*$  — значение  $W(u)$  в точке среднего экстремума (максимума), то движение происходит во внешней об-

ласти по единственно возможной фазовой траектории (рис. 2.15). В противном случае ( $E < W_*$ ) движение может осуществляться

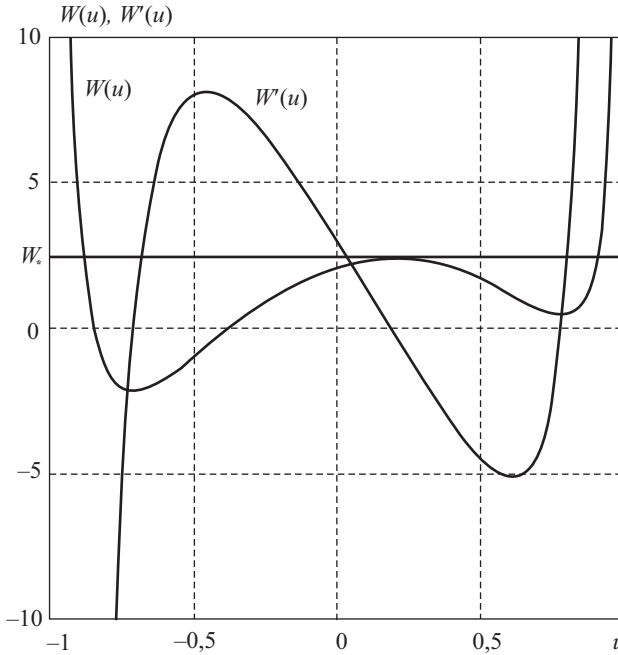


Рис. 2.15. Зависимость функций  $W(u)$  и  $W'(u)$  от  $u = \cos \alpha$

ся в любой из внутренних областей в зависимости начальных условий. Строгое равенство  $E = W_*$  соответствует движению по сепаратрисе.

Таким образом, учёт второй гармоники в зависимости восстанавливающего момента от угла нутации  $M_\alpha(\alpha)$  приводит к возникновению качественно новых свойств, не характерных для случая Лагранжа, обусловленных возможностью появления на фазовом портрете системы особой точки типа седла, соответствующей неустойчивому положению равновесия. При наличии возмущений происходит эволюция величины энергии  $E$ , что может привести к проходу её через критическое значение  $W_*$ . Это соответствует пересечению фазовой траекторией сепаратрисы, когда осуществляется переход между областями фазовой плоскости, внешне сопровождающийся скачкообразным изменением амплитуды колебаний угла нутации. Эту важную особенность необходимо учитывать при построении асимптотических приближений возмущённой системы.

## 2.4. Общее решение уравнения движения тела с бигармонической моментной характеристикой

Перейдём к построению аналитического решения уравнения невозмущённого движения для угла атаки для тела с бигармонической моментной характеристикой (2.29):

$$\ddot{\alpha} + \frac{(R - G \cos \alpha)(G - R \cos \alpha)}{\sin^3 \alpha} - a \sin \alpha - b \sin 2\alpha = 0.$$

Интеграл энергии (2.38) после замены  $u = \cos \alpha$  и разрешения его относительно производной принимает следующий вид:

$$\dot{u}^2 = f(u), \quad (2.38)$$

где

$$\begin{aligned} f(u) &= 2(1 - u^2)(E - au - bu^2) + 2GRu - G^2 - R^2 = \\ &= 2bu^4 + 2au^3 - 2(b + E)u^2 - 2(a - GR)u + (2E - G^2 - R^2). \end{aligned} \quad (2.39)$$

Разделив переменные в уравнении (2.38) и проинтегрировав, получим

$$t - t_0 = \int_{u_0}^u [f(u)]^{-1/2} du. \quad (2.40)$$

Полином  $f(u)$  имеет четвёртую степень относительно  $u$ . Это означает, что интеграл (2.40) относится к семейству эллиптических интегралов [27].

Пусть полином (2.39) имеет четыре корня  $u_1, u_2, u_3, u_4$ , значения которых определяются величинами параметров  $a, b, R, G, E$ . При всём многообразии возможных сочетаний последних существует ограниченное число характерных вариантов расположения корней. Для их выявления исследуем функцию  $f(u)$ . В точках  $u = \pm\infty, u = \pm 1$  её значения равны

$$f(\pm\infty) = \text{sign}(b) \cdot \infty, \quad f(\pm 1) = -(G \mp R)^2 \leq 0. \quad (2.41)$$

Реальному механическому процессу соответствуют значения  $u$  из интервала  $[-1, +1]$  и неотрицательные значения функции  $f(u)$  в силу уравнения (2.38). Но так как при  $u = \pm 1$  согласно (2.41)  $f(u) \leq 0$ , то на указанном интервале полином должен иметь чётное количество действительных корней.

Рассмотрим вначале случай, когда  $b > 0$ . В соответствии с (2.41) возможен единственный вариант расположения корней,

когда все четыре из них являются действительными, причём два лежат на интервале  $[-1, +1]$ , а два других — вне интервала (рис. 2.16 а). Нумерацию корней здесь и далее будем осуществлять так, чтобы реальному движению соответствовал интервал  $[u_2, u_1] \subset [-1, +1]$ . Два оставшихся корня в данном случае пронумеруем в соответствии с условием  $u_3 \leq -1, u_4 \geq 1$ .

В случае, когда  $b < 0$ , возможно несколько различных вариантов расположения корней. Если корни  $u_3$  и  $u_4$  действительные, то существует два варианта, когда указанные корни расположены вне интервала  $[-1, +1]$ :  $u_4 < u_3 < -1$  и  $u_3 > u_4 > 1$  (рис. 2.16 в, г), и два варианта — когда внутри:  $-1 < u_4 < u_3 < u_2 < u_1 < 1$  и  $-1 < u_2 < u_1 < u_4 < u_3 < 1$  (рис. 2.16 б). И, наконец, можно выделить три варианта, когда корни  $u_3$  и  $u_4$  являются комплексно-сопряжёнными числами, действительная часть которых лежит соответственно слева, справа или внутри отрезка  $[u_2, u_1]$  (рис. 2.16 б, в, г). Все вышеупомянутые варианты расположения корней представлены в табл. 2.4.

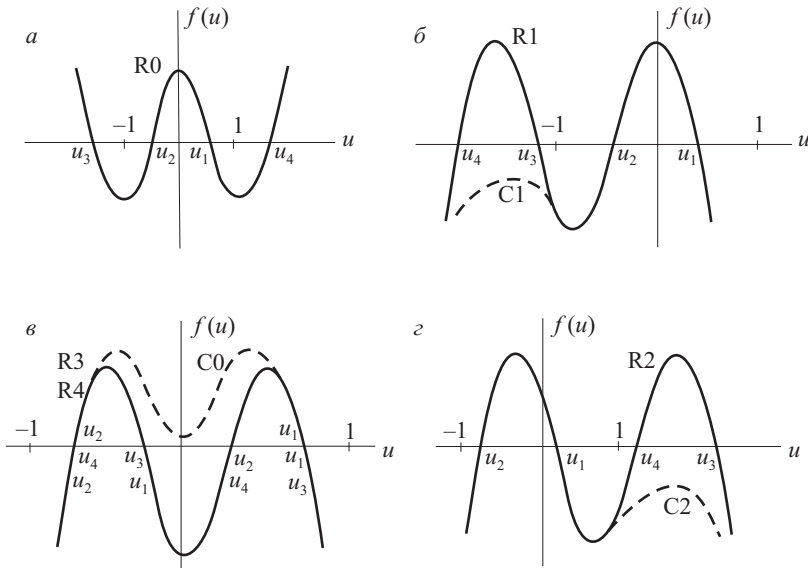


Рис. 2.16. Варианты расположения корней полинома  $f(u)$

Приведение интеграла (2.40) к нормальным эллиптическим интегралам осуществляется посредством замены переменных  $u = u(\gamma)$ , вид которой зависит от знака старшего коэффициента  $b$ , а также от типа и сочетания значений корней полинома

$f(u)$ . Для вариантов R0..R4, когда все четыре корня действительные, замена при условии принятой выше системы нумерации корней может быть представлена в виде [27]

$$u = \frac{u_1(u_2 - u_3) + u_3(u_1 - u_2) \cos^2 \gamma}{(u_2 - u_3) + (u_1 - u_2) \cos^2 \gamma}, \tag{2.42}$$

а для вариантов C0..C2, когда имеют место два действительных и два комплексных корня

$$u = \frac{(u_2 + u_1 \xi) - (u_2 - u_1 \xi) \cos \gamma}{(1 + \xi) - (1 - \xi) \cos \gamma}, \tag{2.43}$$

где

$$\xi = \frac{\cos \chi_1}{\cos \chi_2}, \quad \operatorname{tg} \chi_1 = \frac{u_1 - u_{34}}{v}, \quad \operatorname{tg} \chi_2 = \frac{u_2 - u_{34}}{v}.$$

Таблица 2.4. Расположение корней полинома  $f(u)$

Шифр варианта	$b$	$u_1, u_2$	$u_3, u_4$	Тип корней
R0	$b > 0$		$u_3 < -1, u_4 > 1$	
R1			$u_4 < u_3 < -1$	все корни
R2			$u_3 > u_4 > 1$	$u_1, u_2, u_3, u_4$
R3		$-1 < u_2 < u_1 < 1$	$-1 < u_4 < u_3 < u_2 < u_1 < 1$	действительные
R4	$b < 0$		$-1 < u_2 < u_1 < u_4 < u_3 < 1$	
C0			$u_2 < u_{34} < u_1$	корни $u_1, u_2$
C1			$u_{34} < u_2$	действительные
C2			$u_{34} > u_1$	корни $u_{3,4} = u_{34} + iv$ комплексно-сопряжённые

С помощью замены переменных (2.42) или (2.43) подынтегральное выражение в (2.40) перепишем в виде

$$\frac{du}{[f(u)]^{1/2}} = \frac{\mu}{2|b|} \frac{d\gamma}{[1 - k^2 \sin^2 \gamma]^{1/2}},$$

где  $\mu, k$  – параметры, которые выражаются через корни  $u_1 \dots u_4$ . Тогда интеграл (2.40) можно представить следующим образом:

$$\beta t + \tau_0 = \int_0^\gamma \frac{d\gamma}{[1 - k^2 \sin^2 \gamma]^{1/2}} = F(\gamma, k), \tag{2.44}$$

где  $\beta = 2|b|/\mu$ ,  $F(\gamma, k)$  — неполный нормальный эллиптический интеграл первого рода [12],  $\tau_0$  — постоянная интегрирования. Обратив интеграл (2.44), будем иметь

$$\gamma = am[\beta t + \tau_0, k].$$

В зависимости от типа корней полинома (2.39) подставим это выражение в формулу (2.42) или в (2.43). После ряда преобразований общее решение для угла атаки можно представить в виде [6]

$$\cos \alpha = u = L + \frac{M}{1 + Ncn^\delta(\beta t + \tau_0, k)}. \quad (2.45)$$

Однако следует отметить, что впервые подобное решение было приведено в работе [13]. Параметры  $L$ ,  $M$ ,  $N$ ,  $\beta$ ,  $k$ ,  $\delta$  определяются в зависимости от типа корней полинома  $f(u)$  по одному из двух вариантов:

а) четыре действительных корня ( $\delta = 2$ )

$$\begin{cases} L = u_3, & M = u_1 - u_3, & N = \frac{u_1 - u_2}{u_2 - u_3}, \\ k^2 = \frac{(u_1 - u_2)(u_3 - u_4)}{(u_1 - u_3)(u_2 - u_4)}, & \beta = [-0.5b(u_1 - u_3)(u_2 - u_4)]^{1/2}; \end{cases} \quad (2.46)$$

б) два действительных и два комплексных корня ( $\delta = 1$ )

$$\begin{cases} L = \frac{u_1\xi - u_2}{\xi - 1}, & M = \frac{2\xi(u_2 - u_1)}{\xi^2 - 1}, & N = \frac{\xi - 1}{\xi + 1}, \\ k^2 = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\zeta}{\eta} \right), & \beta = (-2b\eta)^{1/2}, \\ \xi = [(u_1 - u_{34})^2 + v^2]^{-1/2} [(u_2 - u_{34})^2 + v^2]^{1/2}, \\ \eta = [(u_1 - u_{34})^2 + v^2]^{1/2} [(u_2 - u_{34})^2 + v^2]^{1/2}, \\ \zeta = (u_1 - u_{34})(u_2 - u_{34}) + v^2. \end{cases} \quad (2.47)$$

Величина  $\tau_0$  определяется из начальных условий

$$\tau_0 = F(\gamma_0, k), \quad \gamma_0 = -\text{sign}(\dot{\alpha}_0) \arccos \left[ \frac{L + M - \cos \alpha_0}{N(\cos \alpha_0 - L)} \right]^{1/\delta}. \quad (2.48)$$

Общее решение (2.45) позволяет определить период  $T_\alpha$  и частоту  $\omega_\alpha$  колебаний угла атаки. Периоды функций  $cn(x, k)$  и  $cn^2(x, k)$  равны соответственно  $4K(k)$  и  $2K(k)$ , где  $K(k)$  — полный нормальный эллиптический интеграл первого рода. Согласно фор-

муле (2.45) имеем  $\beta T_\alpha = 4K(k)/\delta$ . Тогда получим

$$T_\alpha = \frac{4K(k)}{\delta\beta}, \quad \omega_\alpha = \frac{\delta\pi\beta}{2K(k)}. \quad (2.49)$$

Представляет интерес рассмотрение вариантов, граничных между приведёнными в табл. 2.4. Возможны следующие переходные случаи: R3-C0, R4-C0, когда  $u_2 = u_3$ ,  $v = 0$  или  $u_1 = u_4$ ,  $v = 0$ ; R1-C1, R2-C2, R3-C1, R4-C2, когда  $u_3 = u_4$ ,  $v = 0$  (рис. 2.16). Случаи R1-C1 и R3-C1 или R2-C2 и R4-C2 также могут совпадать между собой, образуя соответственно случаи R1-R3-C1, когда  $u_3 = u_4 = -1$ , или R2-R4-C2, когда  $u_3 = u_4 = 1$ .

Из (2.46), (2.47) следует, что в вариантах R1-C1, R2-C2, R3-C1, R4-C2 модуль эллиптических интегралов  $k = 0$ . Можно показать, что в этом случае выражения (2.46), (2.47), будучи подставленными в (2.42) и (2.43), после ряда преобразований приводят к одной и той же форме общего решения, в которой эллиптические функции заменены обычными тригонометрическими. Варианты R3-C0, R4-C0, которые могут иметь место только при выполнении необходимых условий (2.36), (2.37), соответствуют движению по сепаратрисе. При этом согласно (2.46) и (2.47) модуль  $k = 1$ , откуда следует, что частота колебаний угла атаки  $\omega_\alpha = 0$ , а период  $T_\alpha$  является бесконечно большой величиной. Это объясняется асимптотическим замедлением движения вблизи седловой особой точки.

Ещё один важный частный случай движения — регулярная прецессия — соответствует равенству корней  $u_1$  и  $u_2$ . Это означает согласно (2.46) и (2.47), что параметр  $N = 0$ , а общее решение (2.45) вырождается к виду  $\cos \alpha = u_1$ .

Так как бигармоническая зависимость  $m_\alpha(\alpha)$  (2.29) является расширением синусоидальной зависимости, естественно предположить, что из общего решения (2.45) можно получить общее решение для угла в случае синусоидальной моментной характеристики (2.19). Однако просто приравнять нулю коэффициент второй гармоники  $b$  нельзя из-за возникающих при этом особенностей. При строгом равенстве нулю коэффициента  $b$  (случай Лагранжа) полином  $f(u)$  является кубическим. При этом, как известно, два корня лежат внутри интервала  $[-1, +1]$ , а третий — вне его (это вытекает из того, что в данном случае  $f(\pm\infty) = \pm \operatorname{sign}(a) \cdot \infty$ ,  $f(\pm 1) = -(G \mp R)^2 \leq 0$ ). Очевидно, при малых абсолютных значениях коэффициента  $b$  всегда будут иметь место четыре действительных корня, причём возможны только варианты R0, R1, R2 (табл. 2.4), когда корни  $u_3, u_4$  лежат

вне интервала  $[-1, +1]$ . Согласно теореме Виета

$$-\frac{a}{b} = u_1 + u_2 + u_3 + u_4, \quad (2.50)$$

откуда следует, что при стремлении  $b$  к нулю справа или слева один из корней  $u_3$  или  $u_4$  стремится к  $+\infty$  или  $-\infty$ , в зависимости от знака коэффициента первой гармоники  $a$ :

$$a > 0, \quad b \rightarrow \pm 0: \quad u_3 \rightarrow \mp \infty, \quad bu_3 = a,$$

$$a < 0, \quad b \rightarrow \pm 0: \quad u_4 \rightarrow \mp \infty, \quad bu_4 = a.$$

Будем рассматривать, как и ранее в 2.2, только статически устойчивые тела ( $a = c_0 < 0$ ). Для выполнения предельного перехода  $u_4 \rightarrow \pm \infty$  запишем общее решение (2.45) в виде

$$\cos \alpha = \frac{\frac{L + M + LN}{1 + N} - \frac{LN}{1 + N} \operatorname{sn}^2(\beta t + \tau_0, k)}{1 - \frac{N}{1 + N} \operatorname{sn}^2(\beta t + \tau_0, k)}. \quad (2.51)$$

Из формул (2.46) следует

$$k^2 = \lim_{u_4 \rightarrow \pm \infty} \frac{(u_1 - u_2)(u_3 - u_4)}{(u_1 - u_3)(u_2 - u_4)} = \frac{(u_1 - u_2)}{(u_1 - u_3)}, \quad \frac{N}{1 + N} = \frac{u_1 - u_2}{u_1 - u_3} = k^2,$$

$$\frac{LN}{1 + N} = \frac{u_3(u_1 - u_2)}{u_1 - u_3} = u_3 k^2, \quad \frac{L + M + LN}{1 + N} = u_2.$$

Тогда после подстановки в (2.51) получим

$$\cos \alpha = \frac{u_2 - u_3 k^2 \operatorname{sn}^2(\beta t + \tau_0, k)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(\beta t + \tau_0, k)},$$

или с учётом того, что  $\operatorname{sn}(v + K) = \operatorname{cn}(v)/\operatorname{dn}(v)$  [42], окончательно

$$\cos \alpha = u_2 + (u_1 - u_2) \operatorname{cn}^2(\beta t + \tau_0 + K(k), k).$$

Это решение совпадает с приведённым ранее решением (2.19).

Решения для углов собственного вращения и прецессии, так же как и для случая синусоидального восстанавливающего момента, могут быть получены путём взятия квадратур [36].

## 2.5. Интегралы действия

Наряду с известными первыми интегралами уравнений невозмущённого движения, например интегралом энергии, существуют первые интегралы — интегралы действия [32], которые при



некоторых условия можно рассматривать как адиабатические инварианты возмущённого движения [30].

Рассмотрим возмущённое движение осесимметричного тела. В этом случае правые части уравнений движения (1.31) зависят только от одной быстрой переменной — пространственного угла атаки  $\alpha$ :

$$\ddot{\alpha} + \frac{(R - G \cos \alpha)(G - R \cos \alpha)}{\sin^3 \alpha} - M_\alpha(\alpha, z) = \varepsilon \Phi_\alpha(\alpha, z), \dot{z} = \varepsilon \Phi_z(\alpha, z), \quad (2.52)$$

где  $\varepsilon$  — малый параметр,  $z = (R, G, V, \vartheta, H)$  — вектор медленно меняющихся переменных,

$$\varepsilon \Phi_\alpha(\alpha, z) = \left( \frac{m_{zn}^{\bar{w}_z} l^2}{I} - \frac{c_{ya}^\alpha}{m} \right) \frac{qS\dot{\alpha}}{V}.$$

Если в системе уравнений (2.52) пренебречь малым возмущающим диссипативным моментом  $\varepsilon \Phi_\alpha(\alpha, z)$ , то для этой системы интеграл действия является интегралом возмущённого движения [21]. Для получения аналитического представления интеграла действия необходимо задаться аналитической зависимостью восстанавливающего момента  $M_\alpha(\alpha, z)$  от угла атаки. Очевидно, что наиболее общей в рамках этой главы можно считать бигармоническую зависимость (2.29)

$$M_\alpha(\alpha, z) = a(z) \sin \alpha + b(z) \sin 2\alpha.$$

На знаки медленно меняющихся коэффициентов  $a(z)$  и  $b(z)$  никаких ограничений не накладывается, момент  $M_\alpha(\alpha, z)$  может быть как собственно восстанавливающим, так и опрокидывающим.

Найдём аналитические выражения для интеграла действия, для чего воспользуемся одной из форм его записи [21]:

$$I_g = \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \dot{\alpha} d\alpha, \quad (2.53)$$

где  $\alpha_{\min}$ ,  $\alpha_{\max}$  — амплитудные значения угла атаки (при плоском вращении  $\alpha_{\min} = -\pi$ ,  $\alpha_{\max} = \pi$ ). Величину  $\dot{\alpha}$  будем определять из интеграла энергии системы (2.52) при  $\varepsilon = 0$ :

$$E = \frac{\dot{\alpha}^2}{2} + \frac{R^2 + G^2 - 2RG \cos \alpha}{2 \sin^2 \alpha} + a \cos \alpha + b \cos^2 \alpha = h. \quad (2.54)$$

Произведём замену переменных  $u = \cos \alpha$  в интеграле действия (2.53), учитывая выражение (2.54),

$$I_g = -m \int_{u_1}^{u_2} \frac{\sqrt{f(u)}}{1-u^2} du, \quad (2.55)$$

где  $f(u) = \dot{u}^2$ ,

$$f(u) = 2bu^4 + 2au^3 - 2(b+h)u^2 - 2(a-RG)u + (2h-R^2-G^2), \quad (2.56)$$

$u_1 = \cos \alpha_{\min}$ ,  $u_2 = \cos \alpha_{\max}$  (при плоском вращении:  $u_1 = 1$ ,  $u_2 = -1$ ; при плоских колебаниях относительно  $\alpha = 0$ :  $u_1 = 1$ ,  $u_2 = \cos \alpha_{\max}$ , относительно  $\alpha = \pi$ :  $u_1 = \cos \alpha_{\min}$ ,  $u_2 = -1$ ).

Параметр  $m$  в формуле (2.55) соответствует следующим значениям:  $m = 2$  при плоском вращении, плоских колебаниях относительно  $\alpha = 0, \pi$ ;  $m = 1$  во всех остальных случаях.

Интеграл (2.53) относится к классу эллиптических интегралов и, следовательно, приводится к сумме элементарных функций и трёх так называемых нормальных эллиптических интегралов [27]. Результат интегрирования зависит от типа корней полинома четвёртой степени  $f(u)$ . Для реализации реального физического процесса два из четырёх корней многочлена (2.56) должны соответствовать минимальному и максимальному углам атаки:  $u_1 = \cos \alpha_{\min}$ ,  $u_2 = \cos \alpha_{\max}$ . Корни  $u_1$  и  $u_2$  должны принадлежать интервалу  $[-1, +1]$ . Оставшиеся два корня  $u_3$ ,  $u_4$  в зависимости от значений параметров  $h$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $R$  и  $G$  могут быть либо действительными, либо комплексно-сопряжёнными. Введём следующее правило нумерации этих корней. Действительные корни: при  $b < 0$  —  $u_3 > u_4$ , при  $b > 0$  —  $u_3 < u_4$ .

Комплексно-сопряжённые корни:  $u_{3,4} = u_{34} \pm iv$ .

Рассмотрим сначала частный случай движения — плоский, который реализуется при  $R = 0$  и  $G = 0$ . Приведение интеграла (2.55) к нормальным эллиптическим осуществляется посредством преобразования  $u = u(\gamma)$ , отображающего интервал интегрирования  $[u_2, u_1]$  в соответствующий интервал действительного аргумента  $\varphi \in [0, \pi/2]$ . Вид преобразования  $u = u(\gamma)$  зависит от типа и сочетания значений корней, а также от знака старшего коэффициента  $b$  полинома  $f(u)$  [27].

Если все четыре корня действительные, то замена переменных  $u(\gamma)$  имеет вид

$$u = \frac{u_2(u_1 - u_3) - u_3(u_1 - u_2) \sin^2 \gamma}{(u_1 - u_3) - (u_1 - u_2) \sin^2 \gamma}. \quad (2.57)$$

Тогда интеграл (2.55) выражается через полные эллиптические интегралы следующим образом:

$$I_g^{\text{пл}} = m\sigma \left\{ hK(k) - a[\lambda K(k) + v\Pi(n, k)] - \right. \\ \left. - b \left[ \left( \lambda^2 - 0.5 \frac{v^2}{1+n} \right) K(k) + \left( \frac{nv^2}{2(1+n)(k^2+n)} \right) E(k) + \right. \right. \\ \left. \left. + \left( \frac{v^2}{2} \left( \frac{n+2k^2}{k^2+n} + \frac{1}{1+n} \right) + 2\lambda v \right) \Pi(n, k) \right] \right\}, \quad (2.58)$$

где  $K(k)$ ,  $E(k)$ ,  $\Pi(n, k)$  — полные эллиптические интегралы I, II и III рода;

$$k = \sqrt{\frac{(u_3 - u_4)(u_2 - u_1)}{(u_3 - u_1)(u_2 - u_4)}}$$

— модуль эллиптических интегралов,

$$n = \frac{u_2 - u_1}{u_1 - u_3}, \quad \sigma = \frac{4}{\sqrt{-2b(u_1 - u_3)(u_2 - u_4)}}, \\ \lambda = u_3, \quad v = (u_2 - u_3).$$

Если полином (2.56) имеет два действительных и два комплексных корня ( $u_{3,4} = u_{34} \pm i\nu$ ), тогда используется замена переменных

$$u = \frac{u_2 + u_1\xi - (u_2 - \xi u_1) \cos \gamma}{(1 + \xi) - (1 - \xi) \cos \gamma}, \quad (2.59)$$

где

$$\xi = \frac{\cos \chi_1}{\cos \chi_2}, \quad \text{tg} \chi_1 = \frac{u_1 - u_{34}}{\nu}, \quad \text{tg} \chi_2 = \frac{u_2 - u_{34}}{\nu}.$$

Этому случаю соответствует следующее выражение для интеграла: действия

$$I_g^{\text{пл}} = m\sigma \left\{ hK(k) - a[\lambda K(k) + v(1+n)\Pi(n, k)] - \right. \\ \left. - b \left[ \left( \lambda^2 - v^2(1+n) \right) K(k) + \left( \frac{v^2(1+n)n}{k^2+n} \right) E(k) + \right. \right. \\ \left. \left. + (1+n) \left( \frac{v^2(1+n)(n+2k^2)}{k^2+n} + 2\lambda v \right) \Pi(n, k) \right] \right\}, \quad (2.60)$$

где

$$k = \sqrt{0.5 \left(1 - \frac{\zeta}{\vartheta}\right)}, \quad n = \frac{(\xi - 1)^2}{4\xi}, \quad \sigma = \frac{4}{\sqrt{-2b\vartheta}},$$

$$\zeta = (u_1 - u_{34})(u_2 - u_{34}) + \nu^2,$$

$$\vartheta = [(u_1 - u_{34})^2 + \nu^2]^{1/2} [(u_2 - u_{34})^2 + \nu^2]^{1/2},$$

$$\xi = [(u_1 - u_{34})^2 + \nu^2]^{-1/2} [(u_2 - u_{34})^2 + \nu^2]^{1/2},$$

$$\lambda = \frac{u_1 \xi - u_2}{\xi - 1}, \quad \nu = 2\xi \frac{u_2 - u_1}{\xi^2 - 1}.$$

Перейдём к рассмотрению общего случая пространственного движения тела. Если все корни полинома (2.56) действительные, тогда преобразование (2.57) с учётом формулы (2.58), даёт следующее выражение для интеграла действия (2.55):

$$I_g^{\text{пр}} = I_g^{\text{пл}} - \frac{\sigma}{2} \sum_{i=1}^2 d_i [\lambda_i K(k) + (v_i - \lambda_i) \Pi(n_i, k)], \quad (2.61)$$

где

$$d_{1,2} = 0.5(R \mp G)^2, \quad n_{1,2} = \frac{(u_2 - u_1)(1 \mp u_3)}{(u_1 - u_3)(1 \mp u_2)},$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{1 \mp u_3}, \quad v_{1,2} = \frac{1}{1 \mp u_2}.$$

Если два действительных и два комплексных корня, то с учётом замены (2.59) и формулы (2.60) получается формула для интеграла действия вида

$$I_g^{\text{пр}} = I_g^{\text{пл}} - \sum_{i=1}^2 0.5\eta d_i [\lambda_i K(k) + v_i(1 + n_i) \Pi(n_i, k)], \quad (2.62)$$

где

$$n_{1,2} = \frac{(\xi - 1 \pm u_2 \mp \xi u_1)^2}{4\xi(1 \mp u_1 \mp u_2 + u_1 u_2)}, \quad \lambda_{1,2} = \frac{\xi - 1}{\xi - 1 \pm u_2 \mp \xi u_1},$$

$$v_{1,2} = \frac{1 + \xi}{1 + \xi \mp u_2 \mp \xi u_1} - \lambda_{1,2}.$$

Формулы (2.58), (2.60)–(2.62) получены для всех возможных случаев движения тела с бигармонической зависимостью восстанавливающего момента от угла атаки. Эти соотношения являются функциями корней полинома  $f(u) = 0$ .

В работе [7] для различных значений коэффициентов  $a$ ,  $b$ ,  $R$ ,  $G$  и начальных условий ( $h$ ) приведены возможные характерные случаи движения и даны формулы для интеграла действия.

Рассмотрим статически устойчивое тело с синусоидальной моментной характеристикой (2.14), для которого  $a < 0$  и  $b = 0$ . Полином четвёртой степени (2.56) в этом случае превращается в полиномом третьей степени (2.15)

$$\dot{u}^2 = 2au^3 - 2hu^2 - 2(a - RG)u + (2h - R^2 - G^2) = f(u). \quad (2.63)$$

Физическое движение реализуется, когда все корни этого кубического полинома действительные. Сохраним нумерацию корней, принятую в параграфе 2.2 (рис. 2.12):  $u_1 > u_2 > u_3$  ( $u_1 = \cos \alpha_{\min}$ ,  $u_2 = \cos \alpha_{\max}$ ).

При плоском движении тела ( $R = G = 0$ ), используя преобразование (2.57), можно получить следующую формулу для интеграла действия:

$$I_g^{\text{пл}} = m\sigma \{hK(k) - a[\lambda K(k) + vE(k)]\}, \quad (2.64)$$

где

$$k = \sqrt{\frac{u_1 - u_2}{u_1 - u_3}}, \quad \sigma = \frac{4}{\sqrt{-2a(u_1 - u_3)}}, \quad \lambda = u_3, \quad v = (u_1 - u_3).$$

При вращении ( $h > |a|$ )  $m = 2$ ,  $u_3 = h/a$ ,  $u_1 = 1$ ,  $u_2 = -1$ . Формула (2.64) принимает вид [29]

$$I_g^* = \frac{8\sqrt{|a|}}{k} E(k), \quad (2.65)$$

где  $k = \sqrt{\frac{2|a|}{h + |a|}}$ .

Границе перехода вращения в колебания соответствует условие  $h = |a|$ . В этом случае интеграл действия, взятый вдоль сепаратрисы, определяется по формуле

$$I_g^* = 8\sqrt{|a|}. \quad (2.66)$$

При плоских колебаниях ( $-|a| < h < |a|$ )  $m = 2$ ,  $u_1 = 1$ ,  $u_2 = h/a$ ,  $u_3 = -1$ . Интеграл действия определяется формулой [29]

$$I_g^* = 8\sqrt{|a|} [E(k) - (1 - k^2)K(k)], \quad (2.67)$$

где  $k = \sqrt{0.5 \left(1 + \frac{h}{|a|}\right)} = \sin \frac{\alpha_{\max}}{2}$ .

В случае пространственного движения тела интеграл действия можно привести к виду

$$I_g^{\text{пп}} = I_g^{\text{пл}} - \frac{\sigma}{2} \sum_{i=1}^2 d_i \lambda_i \Pi(n_i, k), \quad (2.68)$$

где

$$n_{1,2} = \frac{u_2 - u_1}{u_1 \mp 1}, \quad \lambda_{1,2} = \frac{1}{1 \mp u_1}.$$

Если в качестве независимого параметра принять корень полинома (2.63)  $u_2 = \cos \alpha_{\text{max}}$ , то согласно формулам (2.20)–(2.22) два других корня  $u_1, u_3$ , а также интеграл энергии  $h$  можно выразить через параметры  $R, G, a$  и  $u_2$ :

$$u_{1,3} = \pm \eta - \frac{c - bu_2}{1 - u_2^2}, \quad \eta = \sqrt{1 - 2 \frac{cu_2 - b}{1 - u_2^2} + \left( \frac{c - bu_2}{1 - u_2^2} \right)^2},$$

$$h = \frac{R^2 + G^2 - 2RGu_2}{2(1 - u_2^2)} + au_2,$$

где

$$c = \frac{R^2 + G^2}{-4a}, \quad b = \frac{RG}{-2a}.$$

Интеграл действия, вычисленный через параметры  $R, G, a$  и  $u_2$ , получен в работе [11] в виде

$$I_g^{\text{пп}} = 2\beta [a_{11}K(k) + a_{12}E(k) + a_{13}\Pi(n_1, k) + a_{14}\Pi(n_2, k)], \quad (2.69)$$

где

$$k^2 = \frac{u_1 - u_2}{2\eta}, \quad \beta = \sqrt{-a\eta},$$

$$n_1 = \frac{u_1 - u_2}{1 - u_1}, \quad n_2 = -\frac{u_1 - u_2}{1 + u_1}, \quad a_{11} = -2\frac{u_1 + u_2}{\eta}, \quad a_{12} = 4,$$

$$a_{13} = -(1 - u_2) \left( 2 + \frac{1 - u_1}{\eta} \right), \quad a_{14} = -(1 + u_2) \left( 2 - \frac{1 - u_1}{\eta} \right).$$

Найдём формулу для интеграла действия как функцию начальных условий движения тела при входе в атмосферу. При отделении от орбитального модуля спускаемый аппарат на внеатмосферном участке траектории получает некоторый начальный кинетический момент, определяющий дальнейшее его движение относительно центра масс. Внешними аэродинамическими моментами будем пренебрегать. Вследствие этого движение тела подчиняется закону движения твёрдого тела в случае Эйлера:

$$\ddot{\alpha} + \frac{(R_0 - G_0 \cos \alpha)(G_0 - R_0 \cos \alpha)}{\sin^3 \alpha} = 0, \quad (2.70)$$

где  $R_0$  и  $G_0$  — начальные значения.

Уравнению (2.70) соответствует интеграл энергии

$$E = \frac{\dot{\alpha}^2}{2} + \frac{R_0^2 + G_0^2 - 2R_0G_0 \cos \alpha}{2 \sin^2 \alpha} = h. \quad (2.71)$$

Угол атаки изменяется в пределах  $\alpha \in [\alpha_1 = \alpha_{\min}, \alpha_2 = \alpha_{\max}]$ . Границы этого отрезка могут быть найдены из решения квадратного уравнения относительно  $u = \cos \alpha$ , которые получаются из выражения (2.71) при условии  $\dot{\alpha} = 0$ :

$$u_{1,2} = \frac{R_0G_0 \pm \sqrt{R_0^2G_0^2 + 2h[2h - (R_0^2 + G_0^2)]}}{2h}.$$

Тогда в соответствии с выражением (2.55), приняв, что

$$f(u) = \dot{u}^2 = -2hu^2 + 2R_0G_0u + (2h - R_0^2 - G_0^2),$$

формула для интеграла действия имеет вид [11]

$$I_g^{np} = \pi[\sqrt{2h} - \max(|R_0|, |G_0|)]. \quad (2.72)$$

Если тело на внеатмосферном участке траектории совершает плоское вращение ( $R = G = 0$ ,  $\dot{\alpha} = \dot{\alpha}_0 = \text{const}$ ), то согласно (2.55) интеграл действия вычисляется по формуле

$$I_g^{\text{пл}} = 2\pi\dot{\alpha}_0. \quad (2.73)$$

## Глава 3

# ВОЗМУЩЁННОЕ ДВИЖЕНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЛ

В этой главе будем рассматривать пространственное движение идеального тела вращения при спуске в атмосфере. Малая инерционно-массовая и аэродинамическая асимметрии отсутствуют, и на тело действуют только медленно меняющиеся во времени восстанавливающий момент, малые демпфирующие моменты, а также малые моменты иной природы, на которые можно наложить лишь одно ограничение: независимость от углов собственного вращения и прецессии (например, малый момент, действующий относительно продольной оси симметрии). Скоростной напор, определяющий частотные характеристики движения, в процессе спуска изменяется на несколько порядков. На большей части траектории спускаемый аппарат совершает высокочастотные колебания, а система уравнений, описывающая его движение, представляет собой одночастотную систему с медленно меняющимися параметрами. Будем считать, что критерий применимости асимптотических методов выполняется на всей траектории спуска.

Ставится задача построения упрощённых уравнений движения, не содержащих быстро меняющихся переменных, и их приближённых аналитических решений. В качестве упрощённых уравнений будем использовать усреднённые уравнения, а для получения аналитических решений — выражение для интеграла действия, который в ряде случаев является первым интегралом возмущённого движения.

### 3.1. Пространственное движение тела вращения

Пространственное движение будем рассматривать на всей траектории спуска без ограничений, накладываемых на конфигурацию осесимметричного тела и аэродинамические характеристики. Воспользуемся системой уравнений (1.31), описывающих пространственное движение тела с малой асимметрией.



Приравняем нулю все параметры малой асимметрии и опустим кинематическое уравнение для угла собственного вращения, поскольку движение идеального тела вращения не зависит от этого угла. Кроме того, подъёмную силу, входящую в уравнение для угла наклона траектории, учитывать не будем, полагая, что её осреднённое влияние на траекторию очень мало. В результате имеем

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} + \frac{(R - G \cos \alpha)(G - R \cos \alpha)}{\sin^3 \alpha} - M_\alpha(\alpha, z) &= \varepsilon \Phi_\alpha(\alpha, \dot{\alpha}, z), \\ \dot{R} &= \varepsilon \Phi_R(\alpha, z), \quad \dot{G} = \varepsilon \Phi_G(\alpha, z), \\ \dot{V} &= \varepsilon \Phi_V(\alpha, z), \quad \dot{\vartheta} = \varepsilon \Phi_\vartheta(z), \quad \dot{H} = \varepsilon \Phi_H(z). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь  $z = (R, G, V, \vartheta, H)$ ,

$$\begin{aligned} \Phi_\alpha(\alpha, \dot{\alpha}, z) &= \left( \frac{m \bar{\omega}_z l^2}{I} - \frac{c_{ya}}{m} \right) \frac{q S \dot{\alpha}}{V}, \\ \Phi_R(\alpha, z) &= \frac{\Delta m_x q S l}{I} + \frac{m \bar{\omega}_x q S l^2 R}{I_x V} + \frac{m \bar{\omega}_y q S l^2 R}{I V \operatorname{tg} \alpha} - \frac{m \bar{\omega}_y q S l^2 G}{I V \sin \alpha}, \\ \Phi_V(\alpha, z) &= -\frac{c_{xa} q S}{m} - g \sin \vartheta, \\ \Phi_\vartheta(z) &= -\left( g - \frac{V^2}{r} \right) \frac{\cos \vartheta}{V}, \\ \Phi_H(z) &= V \sin \vartheta, \\ \Phi_G(\alpha, z) &= \frac{\Delta m_x q S l \cos \alpha}{I} + \left[ \frac{m \bar{\omega}_x q S l^2 \cos \alpha}{I_x V} + \frac{m \bar{\omega}_y q S l^2 \cos \alpha}{I V \operatorname{tg} \alpha} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{m \bar{\omega}_y q S l^2 \cos \alpha}{I V} - \frac{m \bar{\omega}_x q S l^2 \sin \alpha}{I_x V} + \frac{c_{ya} q S}{m V \sin \alpha} \right] R + \\ &\quad + \left[ \frac{m \bar{\omega}_y q S l^2}{I V} - \frac{m \bar{\omega}_x q S l^2}{I V \operatorname{tg} \alpha} - \frac{c_{ya} q S}{m V \operatorname{tg} \alpha} \right] G. \end{aligned}$$

Индекс « $n$ » при обозначении пространственного угла опущен, поскольку в этой главе речь пойдёт только о пространственном угле атаки, и введено также обозначение поперечного момента инерции:  $I = I_y = I_z$ .

Коэффициенты аэродинамических сил и моментов, входящие в уравнения (3.1), для осесимметричных тел могут быть аппроксимированы чётными или нечётными тригонометрическими рядами Фурье по пространственному углу атаки. Пронормируем нечётные функции путём деления их на  $\sin \alpha$  и в результате бу-

дем иметь дело только с чётными тригонометрическими рядами. Далее произведём эквивалентную замену чётных рядов Фурье на степенные ряды по  $\cos \alpha$  (2.4) и представим коэффициенты аэродинамических сил и моментов в виде

$$B = \sum_{i=0}^n a_{B_i} \cos^i \alpha, \quad B = (c_\tau, m_{xn}^{\bar{w}_x}, m_{yn}^{\bar{w}_y}, m_{zn}^{\bar{w}_z}),$$

$$\bar{D} = \frac{D}{\sin \alpha} = \sum_{i=0}^n a_{D_i} \cos^i \alpha, \quad D = (m^\circ, c_n, m_{xn}^{\bar{w}_y}, m_{yn}^{\bar{w}_x}). \quad (3.2)$$

Следует иметь в виду, что коэффициент лобового сопротивления, коэффициент подъёмной силы и его производная по углу атаки, входящие в соотношения системы (3.1), определяются через коэффициенты нормальной и тангенциальной сил согласно формулам

$$c_{xa} = c_\tau \cos \alpha + c_n \sin \alpha, \quad c_{ya} = -c_\tau \sin \alpha + c_n \cos \alpha, \quad c_{ya}^\alpha = \frac{\partial c_{ya}}{\partial \alpha}. \quad (3.3)$$

Из соотношений (3.2) для коэффициентов  $c_n$  и  $m^\circ$  с точностью до постоянного множителя следует формула для восстанавливающего момента (2.5):

$$M_\alpha(\alpha, z) = (m^\circ + \bar{x}_T c_n) \frac{qSl}{I} = -q \sin \alpha \sum_{i=0}^n c_i \cos^i \alpha. \quad (3.4)$$

Учитывая соотношения для коэффициентов аэродинамических сил и моментов (3.2)–(3.4), исходную систему уравнений возмущённого движения осесимметричного тела в атмосфере (3.1) представим в виде [36]

$$\ddot{\alpha} + F(\alpha) = \varepsilon \Phi_\alpha(\alpha, \dot{\alpha}, z), \quad (3.5)$$

$$\dot{z} = \varepsilon \Phi_z(\alpha, z).$$

Здесь  $z = (R, G, V, \vartheta, H)$ ,

$$F(\alpha, z) = \frac{(R - G \cos \alpha)(G - R \cos \alpha)}{\sin^3 \alpha} + q \sin \alpha \sum_{i=0}^n c_i \cos^i \alpha,$$

$$\Phi_\alpha(\alpha, \dot{\alpha}, z) = -\dot{\alpha} \sum_{i=0}^{n+2} S_{\alpha_i} \cos^i \alpha,$$

$$\Phi_R = \sum_{i=0}^{n+1} S_{R_i} \cos^i \alpha, \quad \Phi_G = \sum_{i=0}^{n+2} S_{G_i} \cos^i \alpha, \quad \Phi_V = \sum_{i=0}^{n+2} S_{V_i} \cos^i \alpha,$$

$$\Phi_{\vartheta} = - \left( g - \frac{V^2}{r} \right) \frac{\cos \vartheta}{V}, \quad \Phi_H = V \sin \vartheta;$$

$$S_{\alpha_i} = \delta_i q_m - \zeta_i q_I \quad (i = 0, 1, \dots, n),$$

$$S_{\alpha_{n+1}} = \delta_{n+1} q_m, \quad S_{\alpha_{n+2}} = \delta_{n+2} q_m,$$

$$S_{R_0} = \Delta m_x \frac{qSl}{I} + \xi_0 R q_{Ix} - \varkappa_0 G q_I,$$

$$S_{R_i} = (\varkappa_{i-1} R - \varkappa_i G) q_I + \xi_i R q_{Ix} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$S_{R_{n+1}} = \varkappa_n R q_I,$$

$$S_{G_0} = \vartheta_0 G q_I - \tau_0 R q_m + \nu_0 R q_{Ix},$$

$$S_{G_1} = \Delta m_x \frac{qSl}{I} + (\vartheta_1 G - \varkappa_0 G - \nu_0 R) q_I +$$

$$+ (\tau_0 G + \lambda_0 R - \tau_1 R) q_m + (\xi_0 R - \nu_1 R) q_{Ix},$$

$$S_{G_i} = (\vartheta_i G - \varkappa_{i-1} G - \vartheta_{i-1} R - \varkappa_{i-2} R) q_I +$$

$$+ (-\nu_i R + \nu_{i-2} R + \xi_{i-1} R) q_{Ix} +$$

$$+ (-\lambda_{i-2} G + \tau_{i-1} G + \lambda_{i-1} R - \tau_i R) q_m,$$

$$(i = 2, 3, \dots, n),$$

$$S_{G_{n+1}} = (-\varkappa_n G + \varkappa_{n-1} R - \vartheta_n R) q_I +$$

$$+ (-\lambda_{n-1} G + \tau_n G + \lambda_n R) q_m + (\nu_{n-1} R + \xi_n R) q_{Ix},$$

$$S_{G_{n+2}} = \varkappa_n R q_I - \lambda_n G q_m + \nu_n R q_{Ix},$$

$$S_{V_0} = -\frac{\lambda_0 qS}{m} - g \sin \vartheta, \quad S_{V_1} = -(\tau_0 + \lambda_1) \frac{qS}{m},$$

$$S_{V_i} = -(\tau_{i-1} + \lambda_i - \lambda_{i-2}) \frac{qS}{m}, \quad (i = 2, 3, \dots, n),$$

$$S_{V_{n+1}} = -(\tau_n - \lambda_{n-1}) \frac{qS}{m}, \quad S_{V_{n+2}} = \frac{\lambda_n qS}{m};$$

$$q_m = \frac{qS}{mV}, \quad q_I = \frac{qSl^2}{IV}, \quad q_{Ix} = \frac{qSl^2}{I_x V};$$

$$\delta_0 = -\lambda_0 + \tau_1, \quad \delta_1 = -2\lambda_1 - \tau_0 + 2\tau_2,$$

$$\delta_i = i(\lambda_{i-2} - \tau_{i-1}) + (i+1)(\tau_{i+1} - \lambda_i) \quad (i = 2, 3, \dots, n-1),$$

$$\delta_n = n(\lambda_{n-2} - \tau_{n-1}) - (n+1)\lambda_n, \quad \delta_{n+1} = (n+1)(\lambda_{n-1} - \tau_n),$$

$$\delta_{n+2} = (n+2)\lambda_n.$$

Параметрами  $\lambda$ ,  $\delta$ ,  $\tau$ ,  $\xi$ ,  $\vartheta$ ,  $\zeta$ ,  $\varkappa$ ,  $\nu$  обозначены коэффициенты разложения аэродинамических характеристик в тригонометриче-

ские ряды, соответственно:  $c_n$ ,  $c_n^\alpha = \partial c_n / \partial \alpha$ ,  $c_\tau$ ,  $m_{xn}^{\bar{\omega}_x}$ ,  $m_{yn}^{\bar{\omega}_y}$ ,  $m_{zn}^{\bar{\omega}_z}$ ,  $m_{xn}^{\bar{\omega}_y}$ ,  $m_{yn}^{\bar{\omega}_x}$ .

Система (3.5) представляет собой квазиконсервативную колебательную систему с одной степенью свободы. При  $\varepsilon = 0$  получаем уравнение невозмущённого движения

$$\ddot{\alpha} + F(\alpha, z) = 0, \quad (3.6)$$

где  $z$  — некоторые постоянные.

Пусть известно общее решение этого уравнения

$$\alpha = \alpha(x, z, t + t_0), \quad (3.7)$$

где  $x$  и  $t_0$  — произвольные постоянные ( $x$  условимся называть амплитудой). Причём это решение периодическое по времени  $t$  периода  $T$ , который зависит от постоянных  $x$  и  $z$ . Для уравнения (3.6) интеграл энергии имеет вид

$$E = \frac{\dot{\alpha}^2}{2} + W(\alpha) = h = \text{const}, \quad (3.8)$$

где

$$W(\alpha) = \int F(\alpha) d\alpha = \frac{R^2 + G^2 - 2RG \cos \alpha}{2 \sin^2 \alpha} - q \sum_{i=0}^{n-1} \frac{c_i}{i+1} \cos^{i+1} \alpha.$$

Очевидно, что  $\frac{\partial E}{\partial z} = \frac{\partial W}{\partial z}$  и

$$E = W(\alpha_{\max}) = W(\alpha_{\min}), \quad (3.9)$$

так как  $\alpha_{\min}$  и  $\alpha_{\max}$  — экстремумы, при достижении которых  $\dot{\alpha} = 0$ .

В общем случае для возмущённой системы (3.5) можно записать усреднённые уравнения движения в трёх эквивалентных формах, предложенных В. М. Волосовым [22], для одной из медленно меняющихся функций: интеграла энергии, максимального угла атаки или интеграла действия

$$I_g(x, t) = \int_0^T \dot{\alpha}^2 dt.$$

Усреднённое уравнение для интеграла действия имеет вид

$$\dot{I}_g = \varepsilon \int_t^{t+T} \Phi_\alpha \dot{\alpha} dt + \varepsilon \int_t^{t+T} \frac{\partial E}{\partial z} (\Phi_z - \bar{\Phi}_z) dt. \quad (3.10)$$

Интеграл действия имеет одно важное свойство, которое ставит его в особое положение по сравнению с другими интегралами движения: если функция  $\Phi_\alpha(\alpha, \dot{\alpha}, z)$  в (3.5) тождественно равна нулю и функция  $\Phi_z(z)$  не зависят от  $\alpha$ , то интеграл действия является адиабатическим инвариантом [32], то есть

$$I_g(x, t) = \int_0^T \dot{\alpha}^2 dt \approx \text{const.} \quad (3.11)$$

Выражение (3.11) является некоторым трансцендентным уравнением, которое связывает величины  $x$  и  $t$ .

Усреднённое уравнение для интеграла энергии записывается следующим образом:

$$\dot{E} = \frac{\varepsilon}{T} \int_t^{t+T} \Phi_\alpha \dot{\alpha} dt + \frac{\varepsilon}{T} \int_t^{t+T} \frac{\partial E}{\partial z} \Phi_z dt. \quad (3.12)$$

Сравнивая уравнения (3.10) и (3.12), можно сделать вывод о том, что интеграл действия менее чувствителен к изменению параметров  $z$ : интеграл  $I_g$  «отзывается» на отклонение скорости  $\dot{z} = \varepsilon \Phi_z$  от её среднего значения  $\varepsilon \bar{\Phi}_z$ , а интеграл  $E$  изменяется в зависимости от скорости изменения параметров  $z$ .

Усреднённое уравнение для максимального угла атаки можно записать в виде

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_{\max} &= \\ &= \frac{\varepsilon}{F(\alpha_{\max}, z)} \left[ \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \Phi_\alpha \dot{\alpha} dt + \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \frac{\partial E}{\partial z} \Phi_z dt - \frac{\partial W(\alpha_{\max}, z)}{\partial z} \bar{\Phi}_z \right]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Уравнения для медленных переменных  $z$  имеют вид

$$\varepsilon \bar{\Phi}_z = \dot{z} = \frac{\varepsilon}{T} \int_t^{t+T} \Phi_z(\alpha(t), z) dt. \quad (3.14)$$

Рассмотренные выше три эквивалентных вида усреднённых уравнений могут быть применены в предположении, что общее решение уравнения невозмущённого движения (порождающее решение) известно в явном виде (3.7).

Пусть порождающее решение определяется только в квадратурах (2.13), причём это решение является периодическим и на одном периоде координата  $\alpha$  имеет один максимум  $\alpha_{\max}$  и один

минимум  $\alpha_{\min}$ . Период колебания невозмущённого движения равен

$$T = \int_0^T dt = \oint \frac{d\alpha}{\dot{\alpha}} = \int_{\alpha_{\max}}^{\alpha_{\min}} \frac{d\alpha}{(-\dot{\alpha})} + \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \frac{d\alpha}{(+\dot{\alpha})},$$

где

$$(\pm\dot{\alpha}) = \pm \sqrt{2 \int_{\alpha}^{\alpha_{\max}} F(\alpha) d\alpha}.$$

Учитывая (3.8), имеем следующую формулу для вычисления периода:

$$T = 2 \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \{2[W(\alpha_{\max}) - W(\alpha)]\}^{-1/2} d\alpha. \quad (3.15)$$

Усреднённые дифференциальные уравнения для вектора медленно меняющихся переменных (3.14) можно представить в виде

$$\dot{z} = \varepsilon \bar{\Phi}_z = \frac{2\varepsilon}{T} \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \Phi_z(\alpha, z) \frac{d\alpha}{|\dot{\alpha}|}. \quad (3.16)$$

Дифференциальное уравнение (3.13), определяющее изменение амплитудной кривой  $\alpha_{\max}(t)$ , запишем в форме

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_{\max} = \frac{\varepsilon}{F(\alpha_{\max}, z)} \left\{ \frac{1}{T} \int_{\alpha_{\max}}^{\alpha_{\min}} \Phi_{\alpha}(\alpha, -\dot{\alpha}, z) d\alpha + \frac{1}{T} \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \Phi_{\alpha}(\alpha, +\dot{\alpha}, z) d\alpha + \frac{1}{T} \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \frac{\partial E}{\partial z} [\Phi_z(\alpha, -\dot{\alpha}, z) + \Phi_z(\alpha, +\dot{\alpha}, z)] \frac{d\alpha}{|\dot{\alpha}|} - \frac{\partial W(\alpha_{\max}, z)}{\partial z} \bar{\Phi}_z \right\}. \quad (3.17) \end{aligned}$$

Значение  $\alpha_{\min}$  определяется при решении уравнения (3.9). Аналогичные уравнения можно записать и для усреднённых уравнений, описывающих изменение интеграла энергии и интеграла действия.

Очевидно, что усреднённые уравнения (3.16), (3.17) строятся только с помощью известных функций  $\Phi_{\alpha}(\alpha, \dot{\alpha}, z)$ ,  $\Phi_z(\alpha, z)$  и  $F(\alpha, z)$ . Определённые интегралы в выражениях (3.15)–(3.17) зависят от тригонометрических функций угла атаки. Представ-

ление коэффициентов аэродинамических сил и моментов в виде степенных рядов по  $\cos \alpha$  (3.2) позволяет иметь в подынтегральных функциях выражений (3.15)–(3.17) единственную тригонометрическую функцию —  $\cos \alpha$ . Согласно (3.5) функция  $\Phi_\alpha(\alpha, \dot{\alpha}, z)$  линейна по  $\dot{\alpha}$ , а функции  $\Phi_z(\alpha, z)$  не зависят от  $\dot{\alpha}$ , поэтому замена переменных  $u = \cos \alpha$  позволяет исключить тригонометрические функции. Введя обозначения  $x = \cos \alpha_{\max}$ ,  $u_1 = \cos \alpha_{\min}$ , усреднённые уравнения (3.16) для вектора  $z$  можно записать в виде

$$\dot{z} = \varepsilon \bar{\Phi}_z = \frac{2\varepsilon}{T} \int_x^{u_1} \frac{\Phi_z du}{\sqrt{2(E-W)(1-u^2)}}, \quad (3.18)$$

где

$$W = \frac{R^2 + G^2 - 2RGu}{2(1-u^2)} - q \sum_{i=0}^n \frac{c_i}{i+1} u^{i+1},$$

$$T = 2 \int_x^{u_1} \frac{du}{\sqrt{2(E-W)(1-u^2)}}.$$

Уравнение для максимального угла атаки  $\alpha_{\max} = \arccos x$  запишем в форме

$$\dot{x} = -\frac{\varepsilon(1-x^2)^{1/2}}{F(x)} \times \left[ \frac{2}{T} \int_x^{u_1} \left( \Phi_\alpha + \frac{\partial W}{\partial z} \frac{\Phi_z}{\sqrt{2(E-W)}} \right) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\partial W(x)}{\partial z} \bar{\Phi}_z \right]. \quad (3.19)$$

Значение  $\alpha_{\min} = \arccos u_1$  получаем из (3.9).

Усреднённые уравнения (3.18), (3.19) описывают движение осесимметричного тела произвольной конфигурации, имеют гладкие правые части, их численное интегрирование не требует больших объёмов вычислений. Сравнительные расчёты по исходным уравнениям (3.5) и усреднённым (3.18)–(3.19) показывают совпадение результатов для случаев, когда критерий применимости асимптотических методов (1.52) для задачи спуска  $\mu \gg 1$ .

### 3.2. Пространственное движение тела с моментной характеристикой близкой к синусоидальной. Приближённые решения

Отметим некоторые особенности движения спускаемых аппаратов, имеющих форму сферы или тонкого конуса, восстанавливающий момент которых пропорционален  $\sin \alpha$  [15]. Поступательное движение сферического тела не зависит от вращательного движения, лобовое аэродинамическое сопротивление не зависит от угла атаки, а подъёмная аэродинамическая сила равна нулю и, следовательно, рассеивание точек посадки весьма незначительно. С другой стороны из-за большого лобового сопротивления время спуска сферы существенно превышает время спуска тонких, заострённых тел, что в некоторых практических задачах может иметь определяющее значение. Кроме того, сферические тела обладают весьма малым аэродинамическим демпфированием, что при определённых начальных условиях может приводить к возникновению колебаний тела относительно центра масс с большими амплитудами и значительным поперечным перегрузкам в процессе спуска. Отсюда ясно, что для описания движения сферического тела вокруг центра масс в полной мере не пригодны ни линейные, ни квазистатические математические модели.

Форму тонкого конуса могут иметь высокоточные головные части баллистических ракет. Движение таких тел происходит на малых углах атаки, что даёт минимальное рассеивание точек падения и малое время спуска. При этом точность попадания в цель таких тел должна быть высокой, что в свою очередь предопределяет высокую точность расчётов. Следовательно, и в этом случае следует использовать для расчётов нелинейную математическую модель.

Рассмотрим класс спускаемых аппаратов, по форме близких к сфере или тонкому конусу. Восстанавливающий момент таких тел близок к синусоидальной зависимости, а коэффициенты  $c_i$  в формуле (3.4) удовлетворяют условиям

$$\left| \frac{c_i}{c_0} \right| = 0(\varepsilon) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Перепишем формулу (3.4) в виде

$$M_\alpha(\alpha, z) = -c_0 q \sin \alpha - \varepsilon q \sin \alpha \sum_{i=1}^n c_i \cos^i \alpha, \quad (3.20)$$



где  $c_0 > 0$  для статически устойчивых тел. Усреднённые уравнения движения осесимметричного тела (3.18)–(3.19) содержат в правых частях довольно сложные квадратуры, которые в ряде случаев могут быть приведены к полным эллиптическим интегралам. Рассматривая члены порядка  $\varepsilon$  в разложении восстанавливающего момента как малые возмущения и перенося их в правую часть первого уравнения возмущённой системы (3.1), уравнения возмущённого движения осесимметричного тела с моментной характеристикой (3.20), близкой к синусоидальной, можно представить в виде

$$\begin{aligned}\ddot{\alpha} + F(\alpha) &= \varepsilon \Phi_{\alpha}(\alpha, \dot{\alpha}, z), \\ \dot{z} &= \varepsilon \Phi_z(\alpha, z).\end{aligned}\tag{3.21}$$

Здесь, в отличие от исходной системы (3.1), имеем

$$\begin{aligned}F(\alpha, z) &= \frac{(R - G \cos \alpha)(G - R \cos \alpha)}{\sin^3 \alpha} + qc_0 \sin \alpha, \\ \Phi_{\alpha}(\alpha, \dot{\alpha}, z) &= -\dot{\alpha} \sum_{i=0}^{n+2} S_{\alpha_i} \cos^i \alpha - q \sin \alpha \sum_{i=1}^n c_i \cos^i \alpha.\end{aligned}$$

При  $\varepsilon = 0$  система уравнений (3.21) переходит в уравнение невозмущённого движения

$$\ddot{\alpha} + \frac{(R - G \cos \alpha)(G - R \cos \alpha)}{\sin^3 \alpha} + c_0 q \cos \alpha = 0,$$

решение которого известно (2.19). Перепишем его в виде

$$\cos \alpha = A \operatorname{cn}^2[\beta(t - t_0) + K, k] + x,\tag{3.22}$$

где

$$\begin{aligned}A &= u_1 - x, \quad x = u_2 = \cos \alpha_{\max}, \\ \beta &= (c_0 q \eta)^{1/2}, \quad k = \left( \frac{A}{2\eta} \right)^{1/2}, \\ \eta &= \left( 1 - 2 \frac{ax - b}{1 - x^2} + \left[ \frac{a - bx}{1 - x^2} \right]^2 \right)^{1/2}, \\ a &= \frac{R^2 + G^2}{4qc_0}, \quad b = \frac{RG}{2qc_0}.\end{aligned}$$

Усреднённое уравнение для амплитуды  $x$  вместе с уравнениями для вектора медленных переменных  $z = (R, G, V, \vartheta, H)$  примут вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{\varepsilon(1-x^2)^{1/2}}{F(x)} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \left[ \Phi_\alpha \dot{\alpha} + \frac{\partial W}{\partial R} \Phi_R + \frac{\partial W}{\partial G} \Phi_G + \frac{\partial W}{\partial q} \Phi_q \right] dt - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial W(x)}{\partial R} \bar{\Phi}_R - \frac{\partial W(x)}{\partial G} \bar{\Phi}_G - \frac{\partial W(x)}{\partial q} \bar{\Phi}_q \right\}, \\ \dot{R} &= \varepsilon \sum_{i=0}^{n+1} \frac{S_{R_i}}{T} \int_0^T \cos^i \alpha dt = \varepsilon \bar{\Phi}_R, \quad \dot{G} = \varepsilon \sum_{i=0}^{n+2} \frac{S_{G_i}}{T} \int_0^T \cos^i \alpha dt = \varepsilon \bar{\Phi}_G, \\ \dot{V} &= \varepsilon \sum_{i=0}^{n+2} \frac{S_{V_i}}{T} \int_0^T \cos^i \alpha dt = \varepsilon \bar{\Phi}_V, \quad \dot{\vartheta} = \varepsilon \Phi_\vartheta, \quad \dot{H} = \varepsilon \Phi_H, \end{aligned}$$

где  $T = 2K/\beta$  – период колебаний,

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_q = (\bar{q}) &= \frac{\partial \rho}{\partial H} \frac{\Phi_H V^2}{2} + \rho V \bar{\Phi}_V, \\ W &= \int F(\alpha) d\alpha = \frac{R^2 + G^2 - 2RG \cos \alpha}{2 \sin^2 \alpha} - c_0 q \cos \alpha. \end{aligned}$$

Подставляя порождающее решение (3.22) в уравнения этой системы и вычисляя квадратуры, получим [8]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{\varepsilon(1-x^2)^{1/2}}{F(x)} [L_\alpha + L_R - W^R \bar{\Phi}_R + L_G - W^G \bar{\Phi}_G + L_q - W^q \bar{\Phi}_q], \\ \dot{R} &= \varepsilon \sum_{i=0}^{n+1} S_{R_i} N_i = \varepsilon \bar{\Phi}_R, \quad \dot{G} = \varepsilon \sum_{i=0}^{n+2} S_{G_i} N_i = \varepsilon \bar{\Phi}_G, \quad (3.23) \\ \dot{V} &= \varepsilon \sum_{i=0}^{n+2} S_{V_i} N_i = \varepsilon \bar{\Phi}_V, \quad \dot{\vartheta} = \varepsilon \Phi_\vartheta, \quad \dot{H} = \varepsilon \Phi_H. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} W^R &= \frac{R - Gx}{1 - x^2}, \quad W^G = \frac{G - Rx}{1 - x^2}, \quad W^q = -c_0 x; \\ L_\alpha &= \frac{1}{T} \int_0^T \Phi_\alpha \dot{\alpha} dt = -\frac{2\beta}{T} \sum_{i=0}^{n+2} S_{\alpha_i} J_{\alpha_i}, \end{aligned}$$

$$L_R = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial W}{\partial R} \Phi_R dt = \sum_{i=0}^{n+1} S_{R_i} (R J_i - G J_{i+1}),$$

$$L_G = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial W}{\partial G} \Phi_G dt = \sum_{i=0}^{n+2} S_{G_i} (G J_i - R J_{i+1}),$$

$$L_q = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial W}{\partial q} \Phi_q dt = -c_0 V \left[ \frac{V}{2} \frac{\partial \rho}{\partial H} \Phi_H N_1 + \rho \sum_{i=0}^{n+2} S_{V_i} N_{i+1} \right];$$

$$J_{\alpha_i} = J_{\alpha_{i-2}} - \sum_{r=0}^{i-2} C_{i-2}^r d_{i-r-1} \quad (i = 2, 3, 4, \dots),$$

$$J_{\alpha_0} = -2(u_1 + x) \frac{K(k)}{\eta} + 4E(k) - (1-x) \left( 2 + \frac{1-u_1}{\eta} \right) \Pi(n_1, k) - \\ - (1+x) \left( 2 - \frac{1+u_1}{\eta} \right) \Pi(n_2, k),$$

$$J_{\alpha_1} = 2(1+xu_1) \frac{K(k)}{\eta} - 4x E(k) - (1-x) \left( 2 + \frac{1-u_1}{\eta} \right) \Pi(n_1, k) + \\ + (1+x) \left( 2 - \frac{1+u_1}{\eta} \right) \Pi(n_2, k) - d_0,$$

$$d_i = 4 \left[ k_1^2 A h_{2i} + (2k^2 - 1) h_{2i+2} - \frac{h_{2i+4}}{2\eta} \right] K(k), \quad (i = 0, 1, 2, \dots);$$

$$J_0 = \frac{1}{2K(k)} \left[ \frac{\Pi(n_1, k)}{1-u_1} + \frac{\Pi(n_2, k)}{1+u_1} \right],$$

$$J_1 = \frac{1}{2K(k)} \left[ \frac{\Pi(n_1, k)}{1-u_1} - \frac{\Pi(n_2, k)}{1+u_1} \right],$$

$$J_i = J_{i-2} - N_{i-2}, \quad (i = 2, 3, 4, \dots);$$

$$N_i = \frac{1}{T} \int_0^T \cos^i \alpha dt = \sum_{r=0}^i C_i^r h_{2(i-r)}, \quad (i = 0, 1, 2, \dots);$$

$$h_0 = 1, \quad h_2 = \frac{2\eta}{K(k)} [E(k) - k_1^2 K(k)],$$

$$h_{2j} = \frac{2\eta}{2j-1} [(2j-2)(2k^2-1)h_{2j-2} + (2j-3)k_1^2 A h_{2j-4}],$$

$$(j = 2, 3, \dots);$$

$$C_i^r = i!x^r / [(i-r)!r!], \quad C_{i-2}^r = \frac{(i-2)!x^r}{(i-2-r)!r!}, \quad 0! = 1,$$

где  $K(k)$ ,  $E(k)$ ,  $\Pi(n_1, k)$ ,  $\Pi(n_2, k)$  — полные эллиптические интегралы первого, второго и третьего рода;  $n_1 = A/(1-u_1)$ ,  $n_2 = -A/(1+u_1)$ ,  $k_1 = (1-k^2)^{1/2}$  — дополнительный модуль.

Правые части усреднённых уравнений (3.23) зависят от четырёх полных эллиптических интегралов первого, второго и третьего рода, которые легко вычисляются по эффективной схеме нахождения арифметико-геометрического среднего [37]. Степень рядов, входящих в эти уравнения, определяется числом гармоник разложения коэффициентов аэродинамических сил и моментов.

Для описания движения тела с синусоидальной моментной характеристикой можно воспользоваться усреднёнными уравнениями (3.23), полагая коэффициенты  $c_i = 0 (i \geq 1)$  в формуле для восстанавливающего момента (3.20)

$$M_\alpha(\alpha, z) = -c_0 q \sin \alpha,$$

где  $c_0 = \bar{x}_{T_0} S l / I$  ( $\bar{x}_{T_0} = x_{T_0} / l$  — безразмерное смещение центра масс тела от центра сферы).

Наиболее простые уравнения движения получатся для тела сферической формы. Введём некоторые допущения. Будем пренебрегать малыми моментами, обусловленными действием сил вязкого взаимодействия ( $m_{xn}^{\bar{\omega}_y} = 0$ ,  $m_{yn}^{\bar{\omega}_x} = 0$ ), а коэффициенты демпфирующих моментов представим в виде

$$m_{xn}^{\bar{\omega}_x} = \text{const}, \quad m_{yn}^{\bar{\omega}_y} = -\bar{x}_{T_0}^2 = \text{const}, \quad m_{zn}^{\bar{\omega}_z} = -(1 + \sin^2 \alpha) \bar{x}_{T_0}^2.$$

Система уравнений возмущённого движения примет вид (1.31)

$$\ddot{\alpha} + \frac{(R - G \cos \alpha)(G - R \cos \alpha)}{\sin^3 \alpha} + c_0 q \cos \alpha = \varepsilon \Phi_\alpha(\alpha, \dot{\alpha}, z),$$

$$\dot{z} = \varepsilon \Phi_z(\alpha, z). \quad (3.24)$$

Здесь

$$\Phi_\alpha(\alpha, \dot{\alpha}, z) = -\dot{\alpha} \sum_{i=0}^2 S_{\alpha_i} \cos^i \alpha, \quad \Phi_R = \frac{m_{xn}^{\bar{\omega}_x} q S l^2 R}{I_x V},$$

$$\Phi_G = \sum_{i=0}^1 S_{G_i} \cos^i \alpha, \quad \Phi_V = -\frac{c_{xa} q S}{m} - g \sin \vartheta,$$

$$\Phi_\vartheta = -\left(g - \frac{V^2}{r}\right) \frac{\cos \vartheta}{V}, \quad \Phi_H = V \sin \vartheta,$$

$$\begin{aligned} S_{\alpha_0} &= 2\bar{x}_{T_0}^2 \frac{qSl^2}{IV}, & S_{\alpha_1} &= 0, & S_{\alpha_2} &= -\bar{x}_{T_0}^2 \frac{qSl^2}{IV}, \\ S_{G_0} &= -\bar{x}_{T_0}^2 \frac{qSl^2 G}{IV}, & S_{G_1} &= \left( \bar{x}_{T_0}^2 + \frac{m_{\bar{x}n}}{\bar{I}_x} \right) \frac{qSl^2 R}{IV}. \end{aligned}$$

При указанных допущениях усреднённые уравнения (3.23) запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{\varepsilon(1-x^2)^{1/2}}{F(x)} [L_\alpha + L_R - W^R \bar{\Phi}_R + L_G - W^G \bar{\Phi}_G + L_q - W^q \bar{\Phi}_q], \\ \dot{R} &= \varepsilon \bar{\Phi}_R, & \dot{G} &= \varepsilon \sum_{i=0}^1 S_{G_i} N_i = \varepsilon \bar{\Phi}_G, & \dot{V} &= \varepsilon \bar{\Phi}_V, \\ \dot{\vartheta} &= \varepsilon \bar{\Phi}_\vartheta, & \dot{H} &= \varepsilon \bar{\Phi}_H, \end{aligned} \quad (3.25)$$

где

$$L_\alpha = \frac{1}{T} \int_0^T \Phi_\alpha \dot{\alpha} dt = -\frac{2\beta}{T} (S_{\alpha_0} J_{\alpha_0} + S_{\alpha_2} J_{\alpha_2}),$$

$$L_R = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial W}{\partial R} \Phi_R dt = \bar{\Phi}_R (R J_0 - G J_1),$$

$$L_G = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial W}{\partial G} \Phi_G dt = \sum_{i=0}^1 S_{G_i} (G J_i - R J_{i+1}),$$

$$L_q = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial W}{\partial q} \Phi_q dt = -c_0 V \left[ \frac{V}{2} \frac{\partial \rho}{\partial H} \Phi_H + \rho \bar{\Phi}_V \right] N_1,$$

$$W^R = \frac{R - Gx}{1 - x^2}, \quad W^G = \frac{G - Rx}{1 - x^2}, \quad W^q = -c_0 x,$$

$$\begin{aligned} J_{\alpha_0} &= -2(u_1 + x) \frac{K(k)}{\eta} + 4E(k) - (1 - x) \left( 2 + \frac{1 - u_1}{\eta} \right) \Pi(n_1, k) - \\ &\quad - (1 + x) \left( 2 - \frac{1 + u_1}{\eta} \right) \Pi(n_2, k), \end{aligned}$$

$$J_{\alpha_2} = J_{\alpha_0} - 4 \left[ k_1^2 A h_2 + (2k^2 - 1) h_4 - \frac{h_6}{2\eta} \right] K(k),$$

$$J_0 = \frac{1}{2K(k)} \left[ \frac{\Pi(n_1, k)}{1 - u_1} + \frac{\Pi(n_2, k)}{1 + u_1} \right],$$

$$J_1 = \frac{1}{2K(k)} \left[ \frac{\Pi(n_1, k)}{1 - u_1} - \frac{\Pi(n_2, k)}{1 + u_1} \right],$$

$$J_2 = J_0 - 1, \quad N_1 = \frac{1}{T} \int_0^T \cos^1 \alpha dt = \frac{2\eta}{K(k)} [E(k) - k_1^2 K(k)] + x.$$

Определим закон изменения угла атаки при квазирегулярной прецессии, когда колебания угла атаки отсутствуют:  $\dot{\alpha} = 0$ ,  $\ddot{\alpha} = 0$ ,  $\alpha = \bar{\alpha}$ . Тогда из первого уравнения системы (2.24) во всё время движения системы имеем

$$GR(1 + \cos^2 \bar{\alpha}) - (G^2 + R^2) \cos \bar{\alpha} + c_0 q \sin^4 \bar{\alpha} = 0.$$

Это же равенство можно получить из формулы (2.20) при

$$\alpha_{\min} = \alpha_{\max} = \bar{\alpha}.$$

Для плотных слоёв атмосферы

$$\frac{R^2 + G^2}{c_0 q} \ll 1, \quad (3.26)$$

квазистатическая зависимость угла атаки от параметров движения имеет вид

$$\bar{\alpha} = \arccos \left( 1 - \frac{|R - G|}{2\sqrt{c_0 q}} \right). \quad (3.27)$$

При выполнении условия (3.26) минимальный угол атаки определяется формулой

$$\alpha_{\min} = \alpha_1 = \arccos \left( 1 - \frac{(R - G)^2}{4c_0 q} \right). \quad (3.28)$$

Пусть выполняется условие (3.26) и аэродинамическое демпфирование отсутствует ( $m_{xn}^{\bar{\omega}_x} = 0$ ,  $m_{yn}^{\bar{\omega}_y} = 0$ ,  $m_{zn}^{\bar{\omega}_z} = 0$ ). Найдём оценку для амплитуды колебания  $\alpha_{\max}$  при движении, близком к плоскому. Интеграл действия согласно (3.29) не изменяет своего значения и является адиабатическим инвариантом. Интеграл действия может быть приведён с помощью решения (2.19) к четырём полным эллиптическим интегралам, входящим в правые части уравнений (3.23):

$$I_g = \int_0^T \dot{\alpha}^2 dt = 2\beta J_{\alpha_0},$$

$$I_g = 2\beta [a_{11}K(k) + a_{12}E(k) + a_{13}\Pi(n_1, k) + a_{14}\Pi(n_2, k)], \quad (3.29)$$

где

$$a_{11} = -\frac{2(u_1 + x)}{\eta}, \quad a_{12} = 4,$$

$$a_{13} = -(1 - x) \left( 2 + \frac{1 - u_1}{\eta} \right), \quad a_{14} = -(1 + x) \left( 2 - \frac{1 + u_1}{\eta} \right).$$

Для случая, когда  $\alpha_{\min}/\alpha_{\max} \leq 0,1$  с точностью 1–2% В. А. Ярошевским было получено приближённое выражение для интеграла действия (3.29):

$$I_g = 8\beta[E(k) - k'^2 K(k)] - \pi[R - G], \quad (3.30)$$

где  $k = \sin(\alpha_{\max}/2)$ .

Рассмотрим следующую функцию модуля  $k$ :

$$D(k) = E(k) - k'^2 K(k) \leq 1. \quad (3.31)$$

Представим полные эллиптические интегралы первого и второго рода в виде ряда по степеням  $k^2$  [42]:

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \left[ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \dots \right],$$

$$E(k) = \frac{\pi}{2} \left[ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{k^4}{3} - \dots \right].$$

Подставим эти ряды в формулу (3.31)

$$D = \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{1}{2} k^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{k^4}{4} + \dots + \left[ \frac{1 \cdot 3 \dots (2i - 3)}{2 \cdot 4 \dots (2i - 2)} \right] \frac{k^{2i}}{2i} + \dots \right\},$$

и произведём обращение этого степенного ряда [24] относительно  $k = \sin(\alpha_{\max}/2)$ . В результате получим зависимость максимального угла атаки от параметров движения [14]:

$$\alpha_{\max} = 2 \arcsin \sqrt{\frac{4}{\pi} D - \frac{2}{\pi^2} D^2 - \frac{1}{\pi^3} D^3 - \frac{5}{2\pi^4} D^4 - \dots}. \quad (3.32)$$

Пусть начальные условия равны

$$V_0 = 7500 \text{ мс}^{-1}, \quad \vartheta_0 = -10^\circ, \quad \alpha_0 = \frac{3\pi}{4}, \quad \dot{\alpha}_0 = 0,$$

$$R_0 = 1,2 \text{ с}^{-1}, \quad G_0 = -1 \text{ с}^{-1}, \quad h_0 = 50000 \text{ м},$$

и тело имеет следующие параметры:

$$\sigma_x = \frac{c_x S}{2m} = 0,001 \text{ мкг}^{-1}, \quad c_0 = 0,0093 \text{ мкг}^{-1}.$$

На рис. 3.1 представлены результаты численного интегрирования системы (3.24) и зависимости (3.32). На рис. 3.2 показаны результаты интегрирования усреднённых уравнений (3.25) для максимального угла атаки и вычисления по приближённым формулам (3.27) и (3.28).

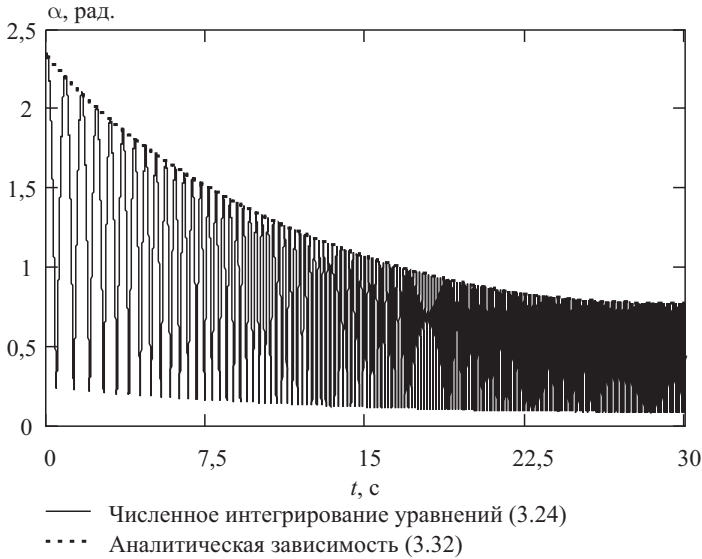


Рис. 3.1. Сравнение результатов

### 3.3. Усреднённые уравнения движение тела с бигармонической моментной характеристикой

Пусть на тело действуют бигармонический момент (2.29)

$$M_{\alpha}(\alpha, q) = a(q) \sin \alpha + b(q) \sin 2\alpha$$

и малый демпфирующий (диссипативный) момент, проекции которого пропорциональны соответствующим проекциям одноимённых угловых скоростей:

$$m_x = \lambda \varkappa \omega_x, \quad m_y = \varkappa \omega_y, \quad m_z = \varkappa \omega_z,$$

где  $\varkappa(q)$  — малый коэффициент, зависящий от скоростного напора  $q$ ,  $\lambda$  — постоянный коэффициент.



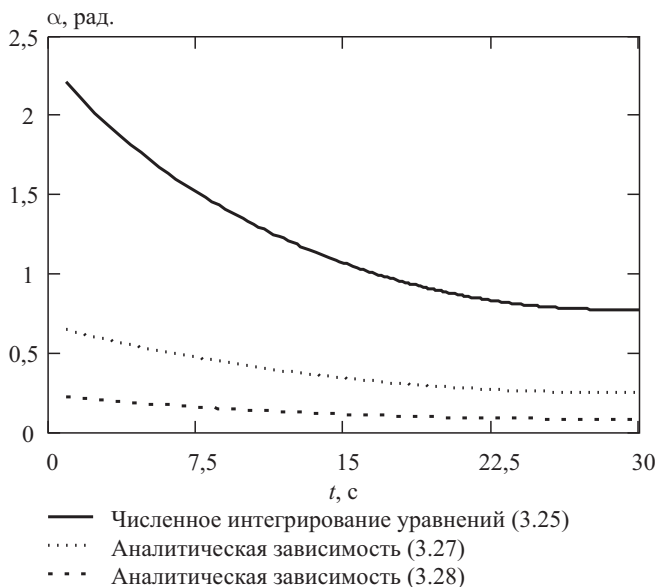


Рис. 3.2. Сравнение результатов

Выберем в качестве амплитуды интеграл энергии (3.8), предварительно записав его в виде

$$E = \frac{\bar{I}_x \omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}{2} + a(q) \cos \alpha + b(q) \cos^2 \alpha.$$

Усреднённые уравнения в этом случае запишутся следующим образом [6]:

$$\begin{aligned} \dot{E} = 2\mathcal{K} \left[ E - a \langle \cos \alpha \rangle - b \langle \cos^2 \alpha \rangle + \left( \frac{\lambda}{\bar{I}_x} - 1 \right) R^2 \right] - \\ - a_q \langle \cos \alpha \cdot \Phi_q(a, q) \rangle - b_q \langle \cos^2 \alpha \cdot \Phi_q(a, q) \rangle, \end{aligned} \quad (3.33)$$

где  $\langle \dots \rangle$  — оператор усреднения по мгновенному периоду колебаний угла атаки  $T$ . Средние значения  $\langle \cos \alpha \rangle$ ,  $\langle \cos^2 \alpha \rangle$  с помощью решения (2.45) запишутся в виде

$$\begin{aligned} \langle \cos \alpha \rangle = L + M J_1, \quad \langle \cos^2 \alpha \rangle = L^2 + 2LM J_1 + M^2 J_2, \\ J_i = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dt}{[1 + Ncn^\delta(\beta t + \tau_0, k)]^i} \quad (i = 1, 2). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Вычислить интегралы (3.34) можно посредством замены

$$\gamma = am[\beta t + \tau_0, k], \quad dt = \frac{d\gamma}{\beta[1 - k^2 \sin^2 \gamma]^{1/2}}.$$

В случае, когда корни полинома (2.39) действительные ( $\delta = 2$ ), с учётом (3.34) после преобразований можно получить для  $J_1, J_2$ :

$$J_1 = (1+n) \frac{\Pi(n, k)}{K(k)}, \quad n = -\frac{N}{1+N},$$

$$J_2 = \frac{(1+n)}{2} \left\{ \left[ \frac{(1+n)(2k^2+n)}{k^2+n} + 1 \right] \frac{\Pi(n, k)}{K(k)} + \frac{n}{k^2+n} \frac{E(k)}{K(k)} - 1 \right\}.$$

Если полином (2.39) имеет комплексные корни ( $\delta = 1$ ), то интегралы  $J_1, J_2$  определяются по следующим формулам:

$$J_1 = (1+n) \frac{\Pi(n, k)}{K(k)}, \quad n = \frac{N^2}{1-N^2},$$

$$J_2 = (1+n) \left[ \frac{(1+n)(2k^2+n)}{k^2+n} \frac{\Pi(n, k)}{K(k)} + \frac{n}{k^2+n} \frac{E(k)}{K(k)} - 1 \right],$$

где  $K(k), E(k), \Pi(n, k)$  — полные эллиптические интегралы первого, второго и третьего рода.

## Глава 4

# ИЗУЧЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛ С МАЛОЙ АСИММЕТРИЕЙ В ОБЩЕЙ ПОСТАНОВКЕ

Глава посвящена нелинейному анализу движения асимметричных тел в окрестности резонанса. Ограничения на компоненты угловой скорости и величину пространственного угла атаки не накладываются. Исследование резонансных режимов движения тела при спуске в атмосфере сводится, во-первых, к приведению исходных нелинейных уравнений движения к стандартной двухчастотной форме для общего случая собственного вращения; во-вторых, к анализу возможных видов резонансов; в-третьих, к изучению условий прохода и захвата в резонанс, в-четвёртых, к исследованию устойчивости резонансных режимов.

### 4.1. Приведение уравнений возмущённого движения к стандартной двухчастотной системе

Запишем уравнения вращательного движения тела с малой инерционно-аэродинамической асимметрией (1.31)

$$\begin{aligned}\ddot{\alpha} + F(\alpha, z) &= \varepsilon \Phi_{\alpha}(\alpha, \varphi, z), \\ \dot{\varphi} &= \frac{R}{I_x} - \frac{(G - R \cos \alpha) \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} = \Phi_{\varphi}(\alpha, z), \\ \dot{z} &= \varepsilon \Phi_z(\alpha, \varphi, z),\end{aligned}\tag{4.1}$$

где

$$F(\alpha, z) = \frac{(G - R \cos \alpha)(R - G \cos \alpha)}{\sin^3 \alpha} - M_{\alpha}(\alpha, z),$$

$$\begin{aligned}\varepsilon \Phi_{\nu} &= D_0^{\nu}(\alpha, z) + D_1^{\nu}(\alpha, z) \sin \varphi + D_2^{\nu}(\alpha, z) \cos \varphi + \\ &\quad + D_3^{\nu}(\alpha, z) \sin 2\varphi + D_4^{\nu}(\alpha, z) \cos 2\varphi, \\ z &= (R, G, q), \quad \nu = \alpha, R, G.\end{aligned}$$

Заметим, что правые части уравнений для угла атаки и вектора медленных переменных являются  $2\pi$ -периодическими функциями переменной  $\varphi$ .

Квазиконсервативная система (4.1) имеет две степени свободы: угол атаки  $\alpha$  и угол собственного вращения  $\varphi$ , что создаёт предпосылки возникновения параметрического резонанса. Для проведения анализа резонансного движения эту возмущённую систему использовать нельзя, так как в ней явным образом не выражены частоты двух быстрых вращений. Преобразуем систему (4.1) к виду, содержащему указанные частоты. Введём в рассмотрение новую переменную — фазу колебаний угла атаки [32]

$$y = \omega(t - t_0). \quad (4.2)$$

Множитель  $\omega$  выберем так, чтобы общее решение первого уравнения системы (4.1) для невозмущённого движения ( $\varepsilon = 0$ ), было  $2\pi$ -периодической функцией переменной  $y$ .

Заменим уравнение второго порядка для угла атаки из системы (4.1) на два дифференциальных уравнения первого порядка для амплитуды  $\alpha_{\max}$  и фазы колебаний  $y$  [9]:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_{\max} &= \varepsilon \Phi_{\alpha_{\max}}(y, \varphi, \alpha_{\max}, z), & \dot{y} &= \omega(\alpha_{\max}, z) + \varepsilon Y(y, \varphi, \alpha_{\max}, z), \\ \dot{\varphi} &= \Phi_{\varphi}(y, \alpha_{\max}, z), & \dot{z} &= \varepsilon \Phi_z(y, \varphi, \alpha_{\max}, z), \end{aligned} \quad (4.3)$$

где

$$\varepsilon Y(y, \varphi, \alpha_{\max}, z) = -\varepsilon 2\pi \operatorname{sign}(\dot{\alpha}) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha_{\max}} \frac{d\alpha}{|\dot{\alpha}|} \right) \Phi_z;$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \Phi_{\alpha_{\max}}(y, \varphi, \alpha_{\max}, z) &= \\ &= \frac{\varepsilon}{F(\alpha_{\max}, z)} \left[ \Phi_{\alpha} \dot{\alpha} - \left( \frac{\partial W(\alpha_{\max}, z)}{\partial z} - \frac{\partial W(\alpha, z)}{\partial z} \right) \Phi_z \right]; \end{aligned}$$

$$W(\alpha, z) = \int_{\alpha} F(\alpha, z) d\alpha, \quad \dot{\alpha} = \pm \sqrt{2[W(\alpha_{\max}, z) - W(\alpha, z)]};$$

$T = 2 \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \frac{d\alpha}{|\dot{\alpha}|}$  — период колебаний угла атаки;  $\alpha_{\max}$ ,  $\alpha_{\min}$  — максимальное и минимальное значения угла атаки на периоде колебаний.

Правые части системы (4.3), являющиеся периодическими функциями переменных  $y$  и  $\varphi$ , в силу уравнений (4.1) по углу  $\varphi$  имеют период  $2\pi$  и определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \Phi_{\alpha_{\max}} &= D_0^{\alpha_{\max}}(y, z) + D_1^{\alpha_{\max}}(y, z) \sin \varphi + D_2^{\alpha_{\max}}(y, z) \cos \varphi + \\ &+ D_3^{\alpha_{\max}}(y, z) \sin 2\varphi + D_4^{\alpha_{\max}}(y, z) \cos 2\varphi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon\Phi_\nu &= D_0^\nu(\alpha, z) + D_1^\nu(\alpha, z) \sin \varphi + D_2^\nu(\alpha, z) \cos \varphi + D_3^\nu(\alpha, z) \times \\ &\quad \times \sin 2\varphi + D_4^\nu(\alpha, z) \cos 2\varphi + D_3^R(y, z) \sin 2\varphi + D_4^R(y, z) \cos 2\varphi, \\ \Phi_G &= D_0^G(y, z) + D_1^G(y, z) \sin \varphi + D_2^G(y, z) \cos \varphi + \\ &\quad + D_3^G(y, z) \sin 2\varphi + D_4^G(y, z) \cos 2\varphi, \\ \Phi_G &= D_0^q(z) = \frac{dq}{dt}. \end{aligned}$$

Амплитуда  $\alpha_{\max}$ , как следует из (4.3), является медленно меняющейся функцией, поэтому включим её в вектор медленных переменных  $z$ . С учётом сделанных замечаний, преобразуем систему (4.3) к двухчастотной форме:

$$\dot{y} = \omega(z) + \varepsilon Y(y, \varphi, z), \quad \dot{\varphi} = \Phi_\varphi(y, z), \quad \dot{z} = \varepsilon \Phi_z(y, \varphi, z), \quad (4.4)$$

где

$$z = (R, G, \alpha_{\max}, q),$$

$$\begin{aligned} \Phi_z &= D_0^z(y, z) + D_1^z(y, z) \sin \varphi + D_2^z(y, z) \cos \varphi + D_3^z(y, z) \sin 2\varphi + \\ &\quad + D_4^z(y, z) \cos 2\varphi. \end{aligned}$$

Колебательная система (4.4) обладает некоторыми свойствами стандартной двухчастотной системы: во-первых, она содержит две быстро меняющиеся переменные частоты, изменения которых имеют порядок единицы; во-вторых, правые части уравнений являются  $2\pi$ -периодическими функциями быстрых фаз  $y$  и  $\varphi$ . Однако, в отличие от стандартной, в системе (4.4) явным образом в виде функции медленных переменных выражена только одна частота — частота  $\omega$ . Частота собственного вращения  $\Phi_\varphi(\alpha(y), z)$  является  $2\pi$ -периодической функцией фазы  $y$ , поскольку  $\alpha(y) = \alpha(y + 2\pi)$  в силу замены (4.2).

Введём в рассмотрение среднюю частоту собственного вращения

$$\lambda(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_\varphi(y, z) dy. \quad (4.5)$$

Очевидно, что при возникновении между частотами быстрых переменных соотношения

$$\Delta(z) = m\omega(z) - n\lambda(z) = O(\varepsilon), \quad (4.6)$$

где  $m$  и  $n$  — взаимно простые целые числа, в системе (4.4) возможно появление параметрического резонанса. Резонанс в указанной системе характеризуется тем фактом, что малые возмущающие инерционные и аэродинамические моменты, вызванные

асимметрией, могут привести к значительному изменению амплитудных параметров движения.

Для приведения возмущённой системы (4.4) к стандартной двухчастотной форме воспользуемся процедурой, представленной в [10]. Угол собственного вращения  $\varphi$  представим в виде суммы вековой и периодической составляющей:

$$\varphi = \bar{\varphi} + \tilde{\varphi},$$

где

$$\bar{\varphi} = \lambda(z)t, \quad \tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(y, z). \quad (4.7)$$

Теперь рассмотрим уравнение для угла собственного вращения  $\varphi$  из системы (4.4) и запишем его в виде

$$\dot{\varphi} = \lambda(z) + \dot{\tilde{\varphi}},$$

где  $\dot{\tilde{\varphi}} = \Phi_\varphi - \lambda(z)$ . Очевидно, что период колебания периодической составляющей  $\tilde{\varphi}$  по переменной  $y$  равен  $2\pi$ , а средние значения  $\bar{\varphi}$  и  $\dot{\tilde{\varphi}}$  на этом периоде равны нулю.

Если амплитуда колебаний угла атаки мала, как, например, при движении, близком к регулярной прецессии, то будут малы значения функции  $\dot{\tilde{\varphi}}$ . Тогда рассматриваемая система (4.4) является стандартной двухчастотной системой, и угол собственного вращения  $\varphi$  может непосредственно использоваться в качестве быстрой переменной вместе с фазой  $y$ .

Выполняя дифференцирование первого выражения из (4.7), можно получить

$$\dot{\bar{\varphi}} = \lambda(z) + \varepsilon\Phi(y, \varphi, z),$$

где

$$\Phi(y, \varphi, z) = \frac{\partial \lambda}{\partial z} \Phi_z \frac{\bar{\varphi}}{\lambda}.$$

Для того, чтобы выразить угол собственного вращения  $\varphi$ , входящий в функции  $\Phi_z(y, \varphi, z)$ ,  $Y(y, \varphi, z)$  и  $\Phi(y, \varphi, z)$ , через новую фазу  $\bar{\varphi}$  можно воспользоваться известными аналитическими решениями, полученными для случая, когда восстанавливающий момент пропорционален синусу угла атаки  $M_\alpha = a \sin \alpha$  (см. (2.27)) или определяется бигармонической зависимостью  $M_\alpha = a \sin \alpha + b \sin 2\alpha$  [36]. В результате, система (4.4) преобразуется к стандартной форме с двумя вращающимися фазами:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \omega(z) + \varepsilon Y(y, \bar{\varphi} + \tilde{\varphi}, z), & \dot{\bar{\varphi}} &= \lambda(z) + \varepsilon \Phi(y, \bar{\varphi} + \tilde{\varphi}, z), \\ \dot{z} &= \varepsilon \Phi_z(y, \bar{\varphi} + \tilde{\varphi}, z), \end{aligned} \quad (4.8)$$

где  $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(y, z)$ .

Рассмотрим тела, восстанавливающий момент которых пропорционален синусу угла атаки. Для нахождения периодической составляющей  $\tilde{\varphi}(y, z)$  использовалось решение (2.19), записанное в виде

$$\cos \alpha = A(x) \operatorname{cn}^2 \left[ \frac{yK}{\pi} + K, k \right] + x, \quad (4.9)$$

и решение для угла собственного вращения (2.27)

$$\varphi - \varphi_0 = \left( \frac{1}{\bar{I}_x} - 1 \right) R t + \frac{(R - G)n_1}{2\beta A(x)} [\Pi(\xi, n_1, k) - \Pi(n_1, k)] \times \\ \times (R + G)n_2 [\Pi\xi, n_2, k) - \Pi(n_1, k)],$$

где  $A(x) = u_1 - x$ .

Согласно решению (4.9) и замене (4.2), частота изменения фазы  $y$  имеет вид

$$\omega = \pi\beta/K. \quad (4.10)$$

Среднюю частоту собственного вращения можно получить, подставив решение (4.9) в выражение (4.5):

$$\lambda(z) = \left( \frac{1}{\bar{I}_x} - 1 \right) R + \frac{n_1 \Pi(n_1, k)(R - G) - n_2 \Pi(n_2, k)(R + G)}{2AK}. \quad (4.11)$$

Выражение для периодической фазы  $\tilde{\varphi}$  можно записать, зная решение для угла собственного вращения (2.27) и формулу для средней частоты собственного вращения (4.11):

$$\tilde{\varphi}(y, z) = \frac{1}{2A\beta} \{ [n_1 \Pi(\xi, n_1, k)(R - G) - n_2 \Pi(\xi, n_2, k)(R + G)] - \\ - [n_1 \Pi(n_1, k)(R - G) - n_2 \Pi(n_2, k)(R + G)] (y/\pi + 1) \},$$

где  $\xi = am(K(y/\pi + 1), k)$ .

Итак, исходная система уравнений движения тела с малой асимметрией (4.1) преобразована к стандартной системе с двумя быстрыми фазами (4.8).

## 4.2. Нерезонансный случай движения тела

Рассмотрим систему возмущённого движения тела с малой асимметрией (4.1) в нерезонансном случае. Используя [21], покажем, что усреднение по времени правых частей уравнений (4.1) можно заменить независимым усреднением по быстрым фазам  $y$  и  $\bar{\varphi}$ . Для возмущённой системы (4.1) запишем вырожденную систему ( $\varepsilon = 0$ ) в виде

$$\dot{y} = \omega, \quad \dot{\bar{\varphi}} = \lambda, \quad \dot{z} = 0, \quad (4.12)$$

из которой следует, что  $z = \text{const}$ , а  $y = \omega t + y_0$ ,  $\bar{\varphi} = \lambda t + \bar{\varphi}_0$ .

Пусть  $f(y, \bar{\varphi} + \tilde{\varphi}(y, z), z)$  — некоторая  $2\pi$ -периодическая функция переменных  $y$  и  $\bar{\varphi}$ . Разложим эту функцию в ряд Фурье по аргументам  $y$  и  $\bar{\varphi}$ :

$$f(y, \varphi, z) = \sum_{m,n} D_{mn}(z) e^{i(my+n\varphi)} = \sum_{m,n} D_{mn}(z) e^{i(my+n\bar{\varphi}+n\tilde{\varphi})}. \quad (4.13)$$

Тогда среднее значение функции (4.13) имеет вид

$$\bar{f}(z) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f[y(t), \bar{\varphi}(t) + \tilde{\varphi}(y, z), z] dt,$$

где  $y(t)$ ,  $\bar{\varphi}(t)$  — решение вырожденной системы (4.12). Тогда

$$\bar{f}(z) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{m,n} D_{mn}(z) e^{i(m\omega+n\lambda)t+i(my_0+n\bar{\varphi}_0)} dt = D_{00}(z),$$

так как при выполнении (4.6) для любых  $m$  и  $n$ , не равных нулю одновременно

$$\bar{f}(z) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{i\gamma t} dt = 0,$$

где  $\gamma$  — произвольная фиксированная постоянная, не равная нулю.

По известной формуле для коэффициентов Фурье получаем

$$\begin{aligned} \bar{f}(z) = D_{00}(z) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y, \bar{\varphi} + \tilde{\varphi}, z) dy d\bar{\varphi} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y, \bar{\varphi} + \tilde{\varphi}, z) dy \right) d\bar{\varphi}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что в нерезонансном случае усреднение  $2\pi$ -периодической функции (4.13) можно производить отдельно по каждой фазе  $y$  и  $\bar{\varphi}$ . Кроме того, среднее значение функции (4.13) не зависит от начальных значений фаз  $y_0$  и  $\bar{\varphi}_0$ .

Независимое усреднение можно проводить как в исходной системе возмущённого движения (4.1), так и в приведённой к стандартному виду системе (4.8). Воспользуемся системой (4.8), тогда усреднение уравнений для медленных переменных по фазе  $\bar{\varphi}$  даёт следующий результат:

$$\dot{z} = \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_z(y, \bar{\varphi} + \tilde{\varphi}, z) d\bar{\varphi} = \varepsilon \Phi_z^\circ(y, z). \quad (4.14)$$



Тогда с учётов вида функции  $\varepsilon\Phi_z(y, \varphi, z)$  имеем

$$\varepsilon\Phi_z^o(y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (D_0^z + D_1^z \sin \varphi + D_2^z \cos \varphi + D_3^z \sin 2\varphi + D_4^z \cos 2\varphi) d\bar{\varphi} = D_0^z.$$

Усреднение уравнений (4.14) по второй фазе  $y$  приводит к виду, совпадающему с усреднёнными уравнениями возмущённого движения осесимметричных тел, рассмотренными в гл. 3.

Следовательно, в нерезонансном случае малая асимметрия не влияет на характер возмущённого движения и это движение не зависит от значений начальных фаз  $y_0$  и  $\bar{\varphi}_0$ .

### 4.3. Виды нелинейных резонансов

Возмущённое движение тела с малой асимметрией описывается системой с двумя вращающимися фазами (4.8). Периодические функции  $\Phi_z(y, \bar{\varphi} + \tilde{\varphi}, z)$  могут быть представлены в виде кратных рядов Фурье (4.13) от быстрых переменных, амплитуда гармоник которых зависит от величины

$$|\Delta(z)| = |m\omega(z) - n\lambda(z)| \quad (4.15)$$

и порядка резонанса  $k = |m| + |n|$ .

В работе [16] показано, что интенсивность резонанса будет тем сильнее, чем ниже порядок резонанса  $k$  и чем ближе к нулю модуль резонансной расстройки (4.15).

Правые части уравнений «медленных» переменных в системе (4.8) имеют вид

$$\varepsilon\Phi_z(y, \varphi, z) = D_0^z + D_1^z \sin \varphi + D_2^z \cos \varphi + D_3^z \sin 2\varphi + D_4^z \cos 2\varphi,$$

где  $\varphi = \bar{\varphi} + \tilde{\varphi}$ .

Функция  $D_0^z$  определяется демпфирующими моментами и малым возмущающим моментом крена  $\varepsilon M_{x0}(z)$ . Остальные функции  $D_i^z$  зависят от малой асимметрии, причём  $D_3^z$ ,  $D_4^z$  определяются только асимметрией вида:  $\Delta_i = (I_z - I_y)/I$ . Отсюда следует, что резонанс в системе (4.8) возможен только при наличии малой асимметрии.

Рассмотрим главный резонанс ( $m = 1, n = 1$ ) [13]

$$\omega = \lambda. \quad (4.16)$$

При этом резонансе, как будет показано ниже, тело будет совершать собственное вращение со средней скоростью, близкой к удвоенной частоте колебаний угла атаки

$$\omega \approx 2\omega_a, \quad (4.17)$$

где  $\omega_a \approx \sqrt{-m_z^\alpha q S l / I}$  — собственная частота колебаний угла атаки,  $m_z^\alpha = -c_0 < 0$  (см. формулу (2.14)).

Совокупность резонансов из (4.16), когда скорость собственного вращения в среднем отлична от нуля, будем называть вращательными резонансами [9]. Термин «вращательный резонанс» заимствован из работы [46], в которой рассматривается резонанс при движении ракет, когда угловая скорость крена близка к собственной частоте нутационных колебаний ( $\omega_x \approx \omega_a$ ).

Частота  $\omega$  связана с мгновенным периодом колебания угла атаки следующим известным соотношением:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad (4.18)$$

а средняя частота собственного вращения вычисляется по формуле

$$\lambda = \dot{\bar{\varphi}} = \frac{1}{T} \int_0^T \left[ \frac{R}{\bar{I}_x} - \frac{(G - R \cos \alpha) \cos \alpha(t)}{\sin^2 \alpha(t)} \right] dt, \quad (4.19)$$

где  $\alpha(t)$  — порождающее решение.

Если решение уравнения невозмущённого движения в явном виде неизвестно, то частоты  $\omega$  и  $\lambda$  можно определить, используя следующие соотношения:

$$T = \sqrt{2} \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \frac{d\alpha}{\sqrt{E - W(\alpha)}},$$

$$\lambda = \frac{\sqrt{2}}{T} \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \left[ \frac{R}{\bar{I}_x} - \frac{(G - R \cos \alpha) \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \right] \frac{d\alpha}{\sqrt{E - W(\alpha)}},$$

где

$$W(\alpha) = \frac{R^2 + G^2 - 2RG \cos \alpha}{2 \sin^2 \alpha} - \int M_\alpha(\alpha) d\alpha,$$

$$W(\alpha_{\min}) = W(\alpha_{\max}) = E.$$

Пусть восстанавливающий момент тела является синусоидальной функцией угла атаки, тогда из порождающего решения (2.19) и формулы (2.21) следует следующее выражение для частоты  $\omega$ :

$$\omega = \frac{\pi}{K} \beta = \frac{\pi}{K} \sqrt{g_0} \sqrt{4 \sqrt{1 - \frac{2(cx - b)}{1 - x^2} + \left( \frac{cx - b}{1 - x^2} \right)^2}}, \quad (4.20)$$

где

$$g_0 = \omega_a^2, \quad c = \frac{R^2 + G^2}{4g_0}, \quad b = \frac{RG}{2g_0}, \quad x = \cos \alpha_{\max}.$$

Средняя скорость собственного вращения тела определяется формулой (4.11).

Покажем, что при малых углах атаки условие главного резонанса (4.16) с учётом формул (4.11) и (4.20) совпадает с известными резонансными соотношениями, полученными из линейной и квазилинейной теорий. Рассмотрим подкоренное выражение в формуле (4.20). При малых углах атаки будем считать, что  $\cos \alpha = 1 - \alpha^2/2$ , а проекции кинетического момента на продольную ось тела и на вектор скорости близки друг другу ( $R \approx G$ ). Тогда получим

$$\eta^2 = 1 - \frac{2(cx - b)}{1 - x^2} + \left( \frac{c - bx}{1 - x^2} \right)^2 \approx 1 + \frac{R^2}{4\omega_a^2}.$$

Для малых углов атаки модуль  $k$ , параметры  $n_1$ ,  $n_2$  и полные эллиптические интегралы  $K(k)$ ,  $\Pi(k, n_1)$  и  $\Pi(k, n_2)$  определяются следующими приближёнными формулами:

$$\begin{aligned} n_1 &\approx \frac{\alpha_{\max}^2 - \alpha_{\min}^2}{\alpha_{\min}^2} = 0(1), & n_2 &\approx -\frac{\alpha_{\max}^2 - \alpha_{\min}^2}{4} = 0(\varepsilon), \\ k^2 &\approx \frac{\alpha_{\max}^2 - \alpha_{\min}^2}{4\eta} = 0(\varepsilon), & K(k) &\approx \frac{\pi}{2}, \\ \Pi(k, n_1) &\approx \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\alpha_{\min}}{\alpha_{\max}}, & \Pi(k, n_2) &\approx \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Имея в виду, что в плотных слоях атмосферы  $\omega_a^2 \gg R^2$ , запишем приближённое выражение для частоты (4.20):

$$\omega \approx 2\sqrt{\omega_a^2 + \frac{R^2}{4}}. \quad (4.22)$$

Перейдём к вычислению средней частоты собственного вращения  $\lambda$ . Подставим приближённые формулы (4.21) в выражение (4.11), в результате получим

$$\lambda = R \left( \frac{1}{\bar{I}_x} - \frac{1}{2} \right) + \frac{R - G}{\alpha_{\max} \alpha_{\min}}. \quad (4.23)$$

Для нахождения произведения  $\alpha_{\max} \alpha_{\min}$  воспользуемся интегралом энергии

$$\frac{\dot{\alpha}^2}{2} + \frac{R^2 + G^2 - 2RG \cos \alpha}{2 \sin^2 \alpha} - \omega_a^2 \cos \alpha = E.$$

При  $\dot{\alpha} = 0$  имеет место равенство

$$\begin{aligned} \frac{R^2 + G^2 - 2RG \cos \alpha_{\max}}{2 \sin^2 \alpha_{\max}} - \omega_a^2 \cos \alpha_{\max} = \\ = \frac{R^2 + G^2 - 2RG \cos \alpha_{\min}}{2 \sin^2 \alpha_{\min}} - \omega_a^2 \cos \alpha_{\min}. \end{aligned}$$

Вводя выше принятые допущения, получим

$$\alpha_{\max} \alpha_{\min} = \sqrt{\frac{(G - R)^2}{\omega_a^2 + R^2/4}}$$

и подставим это выражение в формулу (4.23). При этом будем учитывать, что произведение  $\alpha_{\max} \alpha_{\min}$  всегда положительно и знак последнего слагаемого определяется знаком разности  $(R - G)$ . Окончательно запишем формулу для средней скорости собственного вращения [13]:

$$\lambda = R \left( \frac{1}{\bar{I}_x} - \frac{1}{2} \right) + \text{sign}(R - G) \sqrt{\omega_a^2 + \frac{R^2}{4}}. \quad (4.24)$$

Из этой формулы следует, что возможны два случая вращательного движения, которые по терминологии, принятой в [44], будем называть «прямой» ( $R < G$ ) и «обратной» ( $R > G$ ) прецессией. В случае «обратной» прецессии при главном резонансе выражения (4.22) и (4.24) дают основную формулу линейного резонансного анализа для критической скорости крена [20]:

$$\omega_x^* = \sqrt{-\frac{m_z^\alpha q S l}{I - I_x}} \left( \omega_x = \frac{R}{\bar{I}_x} \right). \quad (4.25)$$

В случае прямой прецессии наблюдается субгармонический резонанс, рассмотренный в работах [13], [33]:

$$\omega_x^* = 3 \sqrt{-\frac{m_z^\alpha q S l}{(1 - 2\bar{I}_x)(I + I_x)}}.$$

Из этой формулы следует, что субгармонический резонанс возникает только в случае, когда поперечный момент инерции тела более, чем вдвое превышает осевой момент инерции:  $I > 2I_x$ .

Рассмотрим пример. Пусть тело имеет сферическую форму, а малая асимметрия определяется только смещением центра масс с оси симметрии аппарата ( $\bar{z}_T \neq 0$ ). Будем полагать, что аэродинамическое демпфирование отсутствует, а коэффициенты нормальной и тангенциальной силы соответственно равны:

$c_n = \sin \alpha$ ,  $c_\tau = \cos \alpha$ . Тогда исходные уравнения возмущённого движения (4.1) примут вид

$$\ddot{\alpha} + F(\alpha) = \bar{z}_\tau \cos \alpha \sin \varphi \frac{qSl}{I},$$

$$\dot{R} = -\bar{z}_\tau \sin \alpha \cos \varphi \frac{qSl}{I}, \quad \dot{G} = 0, \quad \dot{q} = \varepsilon \Phi_q(z).$$

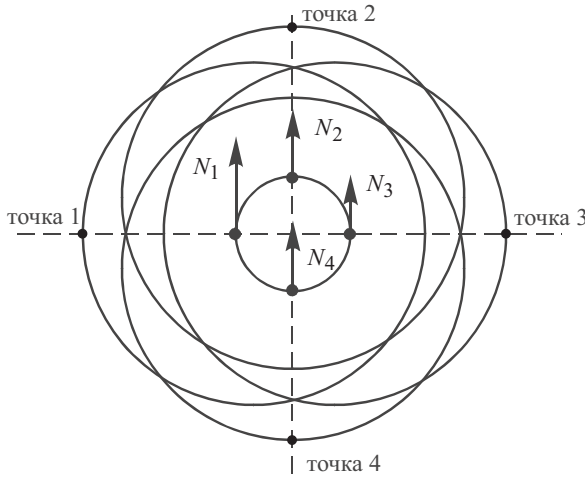


Рис. 4.1. Резонансное вращение тела вокруг оси динамической симметрии под действием момента крена  $M_R = -\bar{z}_\tau qSl \sin \alpha \cos \varphi$  при главном резонансе  $\omega = \lambda$

Таблица 4.1. Значения нормальной силы  $N$  и момента крена  $M_R$  при различных значениях фаз  $y$  и  $\varphi$

точка 1:	$y = 0$ ,	$\varphi = 0$ ,	$N_1 = qS \sin \alpha_{\max}$ ,	$M_R = -\bar{z}_\tau qSl \sin \alpha_{\max}$ ;
точка 2:	$y = \frac{\pi}{2}$ ,	$\varphi = \frac{\pi}{2}$ ,	$N_2 = qS \sin \bar{\alpha}$ ,	$M_R = 0$ ;
точка 3:	$y = \pi$ ,	$\varphi = \pi$ ,	$N_3 = qS \sin \alpha_{\min}$ ,	$M_R = \bar{z}_\tau qSl \sin \alpha_{\min}$ ;
точка 4:	$y = \frac{3\pi}{2}$ ,	$\varphi = \frac{3\pi}{2}$ ,	$N_4 = qS \sin \bar{\alpha}$ ,	$M_R = 0$ .

Пусть наблюдается главный вращательный резонанс:  $\omega = \lambda$  и движение тела синхронизировано по фазам так, что при  $\bar{\varphi} = 0$  фаза  $y = 0$ . В соответствии с порождающим решением (2.19) в точке  $y = 0$  угол атаки равен  $\alpha = \alpha_{\max}$ , а момент крена равен  $\bar{z}_\tau \sin \alpha_{\max} qSl$ . В точке  $\bar{\varphi} = \pi$ ,  $y = \pi$  ( $\alpha = \alpha_{\min}$ ) момент крена равен  $\bar{z}_\tau \sin \alpha_{\min} qSl$  и имеет противоположное направ-

ление (рис. 4.1). В промежуточных точках  $\bar{\varphi} = \pi/2$ ,  $y = \pi/2$  и  $\bar{\varphi} = 3\pi/2$ ,  $y = 3\pi/2$  момент крена равен нулю (табл. 4.1). Отсюда ясно, что в отличие от нерезонансного случая, момент крена в среднем на периоде  $2\pi$  не обращается в нуль. Это приводит к резонансной закрутке тела.

При спуске тела в атмосфере в ряде случаев вследствие действия момента, вызванного малой асимметрией, возникает явление, обусловленное гироскопическим взаимодействием нутационного движения и движения по крену [20]. Это явление получило название резонанса крена или «лунного» резонанса. Тело совершает колебания вокруг собственной продольной оси относительно набегающего потока. Тело обращено одной стороной к набегающему потоку и средняя угловая скорость собственного вращения близка к нулю:  $\lambda \approx 0$ . При резонансе крена, вызванном поперечным смещением центра масс с оси симметрии тела ( $\bar{y}_T, \bar{z}_T \neq 0$ ), возникает явление, аналогичное плоскому нутационному движению тела под действием восстанавливающего момента, роль которого играет момент крена от нормальной аэродинамической силы:

$$M_R = -\bar{y}_T N \sin \varphi - \bar{z}_T N \cos \varphi,$$

где  $N = c_n(\alpha)qS$ . Амплитуда колебаний угла собственного вращения относительно положения равновесия ( $M_R = 0$ ) зависит от начального значения этого угла, величины поперечного смещения центра масс и скорости изменения скоростного напора  $dq/dt$ . Резонансу крена соответствует значение  $m = 0$  в резонансном условии (4.6)

$$\lambda \approx 0. \quad (4.26)$$

Чтобы сопоставить условие резонанса крена (4.26) с известным из линейной теории соотношением (4.25) [20], приравняем формулу (4.24) нулю

$$R \left( \frac{1}{\bar{I}_x} - 0,5 \right) + \text{sign}(R - G) \sqrt{\omega_a^2 + \frac{R^2}{4}} = 0.$$

Перенесём второе слагаемое этого выражения в правую часть, после чего и правую и левую части возведём в квадрат, в результате получим известную формулу (4.25).

Следовательно, показано, что резонансные соотношения для малых углов атаки, являются частными случаями общего резонансного условия (4.6) для главного вращательного резонанса  $m = n = 1$  и резонанса крена  $m = 0$ .

Наличие вторых гармоник по углу собственного вращения в правых частях возмущённой системы (4.1)

$$\varepsilon\Phi_z(y, \varphi, z) = D_0^z + D_1^z \sin \varphi + D_2^z \cos \varphi + D_3^z \sin 2\varphi + D_4^z \cos 2\varphi$$

определяет возможность возникновения удвоенного вращательного резонанса

$$\omega = 2\lambda. \quad (4.27)$$

2 $\pi$ -периодические функции  $D_3^z$  и  $D_4^z$  переменной  $y$  в силу исходных уравнений (1.30) зависят только от одного вида асимметрии — относительной разности поперечных моментов инерции  $\Delta_i = (I_z - I_y)/I$ . Найдём выражение критической угловой скорости крена при малых углах атаки, соответствующее удвоенному вращательному резонансу (4.27). Воспользуемся соотношениями (4.22) и (4.24), тогда для «прямой» прецессии ( $G > R$ ) из условия (4.27) получим

$$\omega_{x2}^* = 2 \sqrt{-\frac{m_z^\alpha qSl}{I - I_x - \frac{3}{4}\bar{I}_x^2 I}}. \quad (4.28)$$

Пренебрегая в знаменателе формулы (4.28) последним слагаемым, получим весьма простое соотношение для тонких тел ( $\bar{I}_x \ll 1$ ):

$$\omega_{x2}^* = 2 \sqrt{-\frac{m_z^\alpha qSl}{I - I_x}} = 2\omega_{x^*}. \quad (4.29)$$

При «обратной» прецессии ( $R > G$ ) выражение для критической скорости крена вырождается.

Рассмотренные три резонанса: главный вращательный, удвоенный вращательный и резонанс крена не исчерпывают все возможные типы резонансных движений, обусловленных видом системы с двумя вращающимися фазами (4.8), которая описывает возмущённое движение асимметричных тел при спуске в атмосфере. Влияние того или иного резонанса из многообразия резонансов (4.6) на возмущённое движение зависит от характеристик тела, от вида и величины малой асимметрии, от начальных условий движения и соотношения фаз быстрых движений в околорезонансной области. Поэтому для каждого конкретного класса тел и типа начальных условий движения следует исследовать резонансы различных порядков из совокупности (4.6), отдавая предпочтение резонансам низких порядков.

#### 4.4. Частично усреднённая система. Анализ резонансных режимов

Для анализа возмущённого движения в окрестности резонанса (4.6) удобно использовать систему маятникового типа [10]. В системе (4.8) введём новую переменную — сдвиг фаз

$$\chi = \frac{m}{n} y - \bar{\varphi}.$$

В окрестности резонанса новая переменная  $\chi$  является медленно меняющейся функцией. Получим систему с одной быстрой переменной  $y$ :

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \omega(z) + \varepsilon Y(y, \chi, z), \\ \dot{\chi} &= \frac{\Delta(z)}{n} + \varepsilon \left[ \frac{m}{n} Y(y, \chi, z) - \Phi(y, \chi, z) \right], \\ \dot{z} &= \varepsilon \Phi_z(y, \chi, z), \end{aligned} \quad (4.30)$$

где  $\Delta(z) = m\omega(z) - n\lambda(z)$  — частотная расстройка.

Выполним усреднение по быстрой переменной  $y$ , затем продифференцируем по времени  $t$  первое уравнение системы (4.30) и опустим члены порядка  $\varepsilon^2$ . Вводя «медленное» время  $\tau = \sqrt{\varepsilon} t$ , приходим к системе маятникового типа с медленно меняющимся крутящим моментом  $Q(\chi, z)$  в следующем виде:

$$\frac{d^2\chi}{d\tau^2} + Q(\chi, z) = 0, \quad \frac{dz}{d\tau} = \mu f_z(\chi, z), \quad (4.31)$$

где  $\mu = \sqrt{\varepsilon}$  — малый параметр,  $f_z(\chi, z) = \langle \Phi_z(y, \chi, z) \rangle$  — средние по  $y$ ,

$$\begin{aligned} Q(\chi, z) &= - \left( \frac{m}{n} \frac{\partial \omega}{\partial z} - \frac{\partial \lambda}{\partial z} \right) f_z(\chi, z) = Q_0(z) + Q_1(z) \sin \chi + \\ &+ Q_2(z) \cos \chi + Q_3(z) \sin 2\chi + Q_4(z) \cos 2\chi. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Коэффициенты  $Q_i$  функции (4.32) полностью определяются величинами  $D_i^z$ , входящими в полную систему уравнений возмущённого движения (4.1). В свою очередь,  $D_i^z$  зависят от параметров вращательного и поступательного движений, а также компонентов вектора малой асимметрии  $\Delta\xi$ . Поскольку в исходные уравнения (4.1) входят только линейные члены от компонентов вектора  $\Delta\xi$ , то функция  $Q$  также линейным образом зависит от параметров малой асимметрии.



Фазовый портрет системы (4.31) состоит из нескольких областей колебательного и вращательного движений, разделённых сепаратрисой.

При отсутствии возмущений ( $\mu = 0$ ) система (4.31) принимает вид

$$\frac{d^2\chi}{d\tau^2} + Q(\chi) = 0 \quad (4.33)$$

и допускает первый интеграл — интеграл энергии

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d\chi}{d\tau} \right)^2 + W(\chi) = E, \quad (4.34)$$

где

$$W(\chi, z) = \int Q(\chi, z) d\chi = Q_0\chi - Q_1 \cos \chi + Q_2 \sin \chi - \frac{1}{2} Q_3 \cos 2\chi + \frac{1}{2} Q_4 \sin 2\chi. \quad (4.35)$$

Характер невозмущённого движения зависит от вида функции (4.32). Вследствие периодичности функции  $Q$  в общем случае движения на фазовом портрете системы (4.33) имеется четыре положения равновесия: два устойчивых и два неустойчивых (рис. 4.2.). Если исключить из рассмотрения инерционную асимметрию  $\Delta_i = (I_z - I_y)/I$ , то система (4.33) имеет одну устойчивую и одну неустойчивую стационарные точки. В этом случае, в силу уравнений (4.1),  $D_3^z = D_4^z = 0$ , и функция (4.32) может быть записана в виде:

$$Q = Q_0(z) + Q_1(z) \sin \chi + Q_2(z) \cos \chi.$$

Стационарные положения системы (4.33) являются корнями уравнения

$$Q(\chi^*, z) = 0. \quad (4.36)$$

Действительные корни этого выражения существуют, если выполняется условие

$$\max_{\chi} Q \cdot \min_{\chi} Q \leq 0. \quad (4.37)$$

Соотношение (4.37) является условием существования стационарных точек.

В силу вида функции  $Q$  в общем случае может существовать четыре корня  $\chi = \chi_i^*$  ( $i = 1, \dots, 4$ ), удовлетворяющих уравнению (4.36). Устойчивое положение равновесия определяется условием

$$\left. \frac{\partial Q}{\partial \chi} \right|_{\chi=\chi_i^*} > 0, \quad (4.38)$$

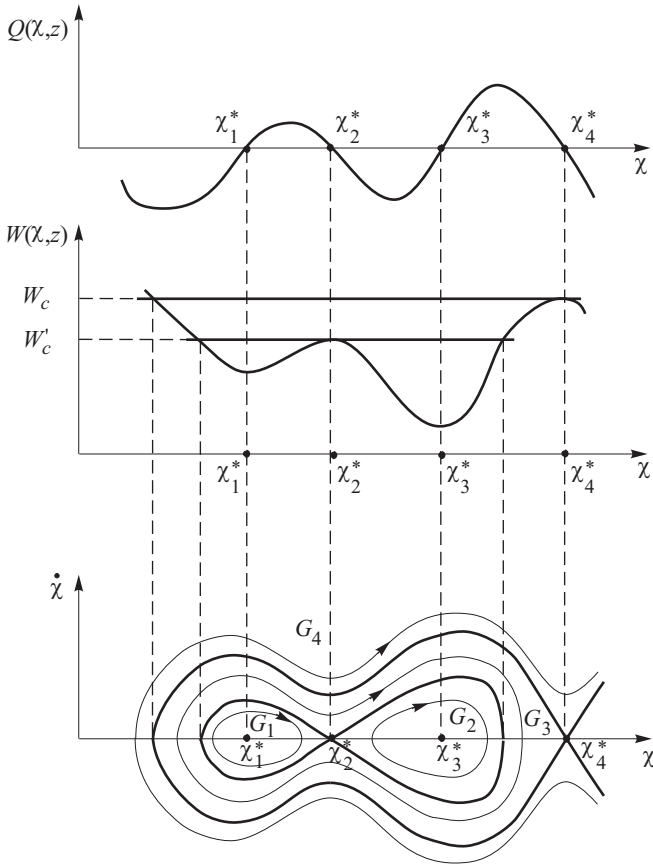


Рис. 4.2. Фазовый портрет маятниковой системы при наличии четырёх стационарных точек

а неустойчивое положение равновесия условием

$$\left. \frac{\partial Q}{\partial \chi} \right|_{\chi=\chi_i^*} < 0.$$

Выполнение условия (4.38) означает существование на фазовой плоскости устойчивой стационарной точки типа центр. В случае, когда все коэффициенты  $Q_i(z)$  в формуле (4.32) отличны от нуля, потенциальная энергия (4.35) может иметь вид, показанный на рис. 4.2. Внешняя сепаратриса отделяет область вращательных движений  $G_4$  от «большой» колебательной области  $G_3$ , которая охватывает две внутренние «малые» области колебательных движений  $G_1$  и  $G_2$ . Точки  $\chi_1^*$  и  $\chi_3^*$  — точки типа центр,  $\chi_2^*$  и  $\chi_4^*$  —

точки типа седло. При отсутствии у тела инерционной асимметрии ( $I_y = I_z$ )  $D_3^z$  и  $D_4^z$  в выражении (4.1) обращаются в нуль, а следовательно, и в формуле (4.32)  $Q_3 = Q_4 = 0$ . В этом случае одна из областей колебательного движения ( $G_1$  или  $G_2$ ), а также стационарная седловая точка  $\chi_2^*$  вырождаются (рис. 4.3.).

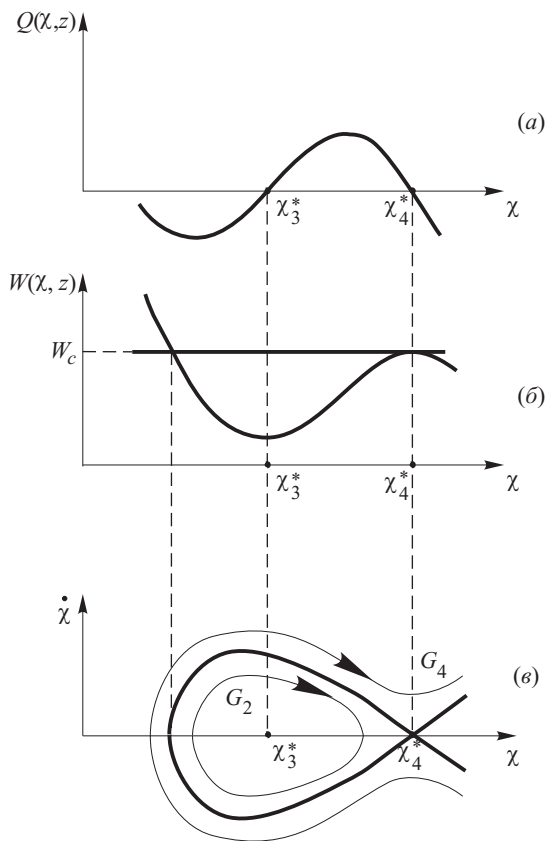


Рис. 4.3. Фазовый портрет маятниковой системы при наличии двух стационарных точек

Если выполняется условие существования стационарных точек (4.37), то возможна реализация режима периодического изменения сдвига фаз  $\chi$  и резонансной расстройки  $\Delta(z) = m\omega(z) - n\lambda(z)$ . При этом может наблюдаться длительное существование резонанса.

Рассмотрим пример. Пусть тело имеет следующие массово-геометрические параметры:  $M = 200$  кг,  $J_x = 0,4$ ,  $S = 0,4$  м<sup>2</sup>,

$l = 0,7$  м,  $\bar{x}_T = 0,02$ ,  $\bar{y}_T = 0$ ,  $\bar{z}_T = 0,0003$ . Будем рассматривать главный вращательный резонанс и резонанс крена. Главный вращательный резонанс может наступить при совпадении частоты колебаний угла атаки и средней угловой скорости собственного вращения:  $\omega(z) = l(z)$ . При резонансе крена или «лунном» резонансе средняя угловая скорость собственного вращения тела близка к нулю:  $\lambda(z) = 0(\varepsilon)$ . На рис. 4.4 показано изменение во времени частот быстрых движений  $\lambda(z)$  и  $\omega(z)$ . Начальные условия движения подобраны так, что в окрестности точек  $t_1$  и  $t_2$  тело захватывается в главный вращательный резонанс, а в окрестности точки  $t_3$  — в резонанс крена.

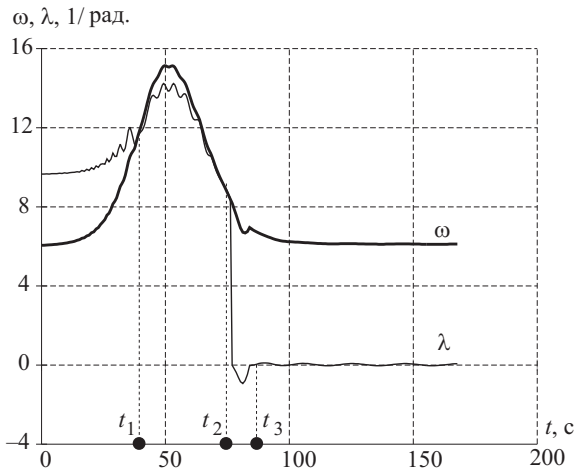


Рис. 4.4. Зависимость частот колебаний от времени при главном вращательном резонансе и резонансе крена

В силу действия на систему (4.31) возмущений на фазовом портрете изменяются фазовые траектории, а также происходит деформация сепаратрис. Возможны три характерных типа движения.

1. Прохождение через резонанс, которому отвечает изменение направления вращения маятниковой системы.

2. Захват в резонанс, когда возможен колебательный режим движения маятника. Этот режим соответствует траекториям, находящимся внутри сепаратрисы и постоянно остающимся вблизи резонанса.

3. Движение в малой окрестности стационарной точки типа центр внутри сепаратрисы.

Фазовые траектории, соответствующие этим типам движения, показаны на рис. 4.5. На рисунке тонкой штриховой линией изображена фазовая траектория, соответствующая проходу через резонанс. Фазовая траектория, соответствующая захвату маятника в резонанс показана толстой сплошной линией. Толстой штриховой линией изображена фазовая траектория системы, совершающей движение в малой окрестности стационарной точки типа центр.

Рассмотренным типам движения, внутри колебательной области, можно поставить в соответствие два вида устойчивости.

Первый вид — это устойчивость маятника в колебательной области (устойчивость резонанса).

Второй вид — устойчивость движения маятниковой системы в малой окрестности стационарной точки типа центр (устойчивость по Ляпунову).

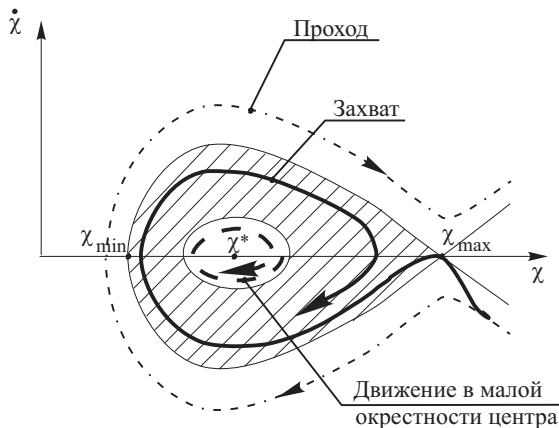


Рис. 4.5. Три типа резонансного движения

Устойчивость движения маятника в колебательной области означает, что при любых малых возмущениях фазовая точка всегда остаётся внутри этой области. В этом случае величина полной энергии системы  $E$ , на любом интервале времени, не превышает значения потенциальной энергии  $W_c$ , вычисленного в седловой точке (рис. 4.6). Однако это, вообще говоря, не означает устойчивости движения маятника по Ляпунову в окрестности стационарной точки типа центр, и наоборот.

Поскольку невозмущённое движение ( $\mu = 0$ ) маятниковой системы (4.31) устойчиво не асимптотически, то устойчивость движения при отсутствии возмущений не означает устойчивость

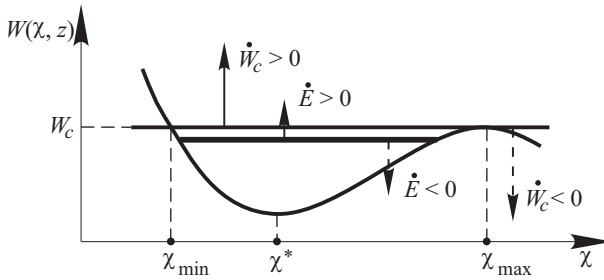


Рис. 4.6. Виды колебательного движения маятника

полученного решения при действующих малых возмущениях. Рассматриваемая задача может быть решена с помощью обобщённого прямого метода Ляпунова, сформулированного в работе [39].

#### 4.5. Устойчивость нелинейных резонансов

Понятие устойчивости резонанса (или застревания в резонансе) используется в практических задачах, связанных со спуском космических аппаратов в атмосферу. Для реализации устойчивого резонанса необходимо, чтобы на фазовой плоскости существовала колебательная область, ограниченная сепаратрисой, то есть, чтобы выполнялось условие (4.37), и достаточно, чтобы при отсутствии внутри колебательной области предельного цикла производная по медленному времени  $\tau$  полной энергии системы  $E$  была меньше, чем производная по медленному времени потенциальной энергии  $W_c$ , вычисленной в седловой точке (рис. 4.6). В этом случае колебательная область расширяется быстрее, чем фазовая траектория приближается к границе области, ограниченной сепаратрисой. Производная  $dE/d\tau$  показывает эволюцию фазовой траектории маятниковой системы (4.31), а производная  $dW_c/d\tau$  — эволюцию сепаратрисы под действием малых возмущений ( $\mu \neq 0$ ). Поскольку речь идёт о колебательном движении системы, то об указанных производных можно говорить только в смысле их средних на периоде колебаний значений. Так как переход через сепаратрису возможен лишь в малой её окрестности, то соответствующие производные следует усреднять на сепаратрисе, ограничивающей область, устойчивость движения в которой исследуется. Достаточное условие устойчивости резо-

нанса можно записать в виде [5]

$$\left\langle \frac{dW_c}{d\tau} \right\rangle - \left\langle \frac{dE}{d\tau} \right\rangle > \delta_1, \quad (4.39)$$

где

$$\left\langle \frac{dW_c}{d\tau} \right\rangle = \oint_l \frac{\partial W_c(z)}{\partial z} f_z(\chi, z) d\chi, \quad \left\langle \frac{dE}{d\tau} \right\rangle = \oint_l \frac{\partial E(\chi, z)}{\partial z} f_z(\chi, z) d\chi, \quad (4.40)$$

$\delta_1$  — некоторая положительная константа, которая выбирается, исходя из условия отсутствия внутри колебательной области предельного цикла. Интегралы (4.40) вычисляются вдоль сепаратрисы  $\ell$ .

В случае, когда резонансный режим устойчив, локальный максимум потенциальной энергии растёт быстрее полной энергии и система не может выйти из потенциальной ямы и «погружается» внутрь текущей области. В случае неустойчивого резонансного режима движения полная энергия растёт быстрее локального максимума потенциальной энергии. То есть система «выталкивается» из потенциальной ямы, и её дальнейшее местонахождение внутри смежных областей носит вероятностный характер.

Если предположить, что площадь текущей колебательной области ограничена малой величиной, то «погружение» системы внутрь колебательной области означает захват тела в резонанс, а «выталкивание» — уход от резонанса. Для анализа процесса перехода фазовой траектории через сепаратрису воспользуемся функцией  $\Theta(z)$  [34], которую для системы (4.31) можно записать в виде

$$\Theta(z) = - \oint_l \frac{\partial H(\chi, z)}{\partial z} f_z(\chi, z) d\chi. \quad (4.41)$$

Здесь  $H$  — нормированный гамильтониан, который обращается в нуль на сепаратресе. Его можно представить как разность полной энергии системы  $E$  и потенциальной энергии, вычисленной в седловой точке  $W_c$ :

$$H = E - W_c.$$

Функция  $\Theta(z)$  есть скорость приближения площади, ометаемой фазовой траекторией, к площади сепаратрисы. В [34] показано, что несобственный интеграл (4.41) сходится. Достаточное условие устойчивости резонанса (4.39) с учётом (4.41) можно переписать следующим образом:

$$\Theta(z) > \delta_1.$$

Заметим, что  $\frac{\partial E}{\partial z} = \frac{\partial W}{\partial z}$ , тогда имеем

$$\Theta(z) = \oint_l \left[ \frac{\partial W_c}{\partial z} - \frac{\partial W(\chi)}{\partial z} \right] f_z(\chi, z) d\chi.$$

Подставляя в это выражение соотношение для потенциальной энергии (4.35), запишем окончательно достаточное условие устойчивости резонанса (4.39) в виде

$$\oint_l \left[ \vartheta_0(\chi_c - \chi) - \vartheta_1(\cos \chi_c - \cos \chi) + \vartheta_2(\sin \chi_c - \sin \chi) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \vartheta_3(\cos 2\chi_c - \cos 2\chi) + \frac{1}{2} \vartheta_4(\sin 2\chi_c - \sin 2\chi) \right] f_z(\chi, z) d\chi > \delta_1, \quad (4.42)$$

где

$$\vartheta_i = \frac{\partial Q_i}{\partial z}, \quad i = 0, \dots, 4.$$

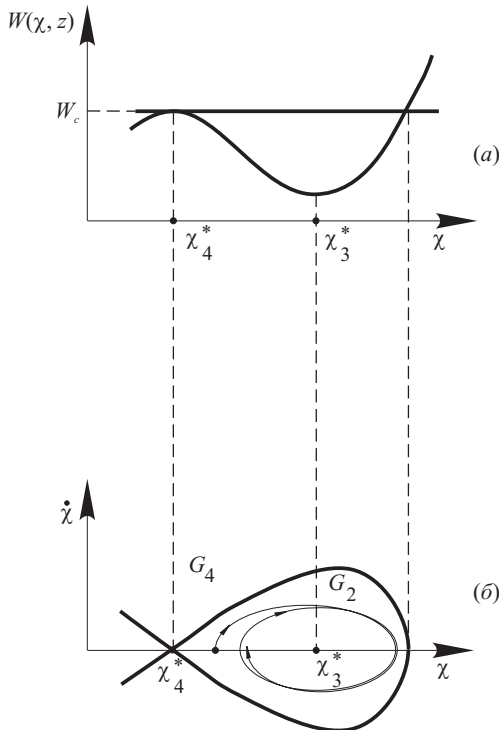


Рис. 4.7. Фазовый портрет маятниковой системы



Рассмотрим движение в атмосфере тела со следующими массово-геометрическими характеристиками:  $M = 200$  кг,  $J_x = 0,4$ ,  $I_y = I_z = 1$  кгм<sup>2</sup>,  $S = 0,4$  м<sup>2</sup>,  $l = 0,7$  м,  $\bar{x}_T = 0,02$ ,  $\bar{y}_T = 0$ ,  $\bar{z}_T = 0,0004$ . Для динамически симметричного тела ( $I_y = I_z$ ) функция (4.32) запишется следующим образом:

$$Q(\chi, z) = Q_0(z) + A(z) \sin(\chi + \chi_0),$$

где

$$A = \sqrt{Q_1^2 + Q_2^2}, \quad \chi_0 = \operatorname{arctg} \frac{Q_1}{Q_2}, \quad \bar{z} = (\alpha_{\max}, R, q).$$

Потенциальная энергия  $W$  имеет вид, показанный на рис. 4.7 а. Фазовая плоскость состоит из одной области колебательного движения  $G_2$  и области вращательного движения  $G_4$  (см. рис. 4.7 б). Точка  $\chi_3^*$  — устойчивая точка типа центр, а точка  $\chi_4^*$  — неустойчивая точка типа седло. Пусть система начинает своё движение из окрестности точки  $\chi_3^*$ . На рис. 4.8 показано изменение по времени расстройки частот  $\Delta(z) = m\omega(z) - n\lambda(z)$ .

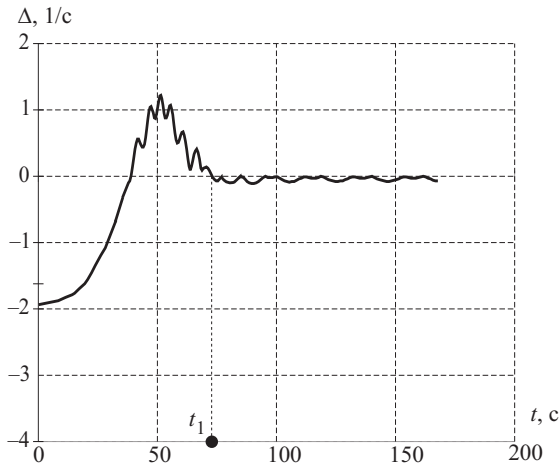


Рис. 4.8. Изменение резонансной расстройки частот во времени

В точке  $t_1$  был реализован захват в резонанс крена. При этом  $\langle dW_c/d\tau \rangle = -0,08$ ,  $\langle dE/d\tau \rangle = -0,10$ ,  $\Theta = 0,02$ . Это означает, что полная энергия системы убывает быстрее, чем потенциальная энергия в седловой точке  $\chi_4^*$ . Поэтому через конечный промежуток времени система окажется на дне потенциальной ямы в малой окрестности точки  $\chi_3^*$ . Вид фазовой траектории усреднённой системы, приведённый на рис. 4.7 б, подтверждает устойчивость резонанса крена.

#### 4.6. Устойчивость положения равновесия относительно малых возмущений

Устойчивость резонанса, вообще говоря, не означает устойчивости движения в окрестности положения равновесия. Действительно, фазовая траектория может выйти из малой окрестности стационарной точки, но при этом остаться в пределах колебательной области в силу того, что область колебательного движения расширяется быстрее, чем система подходит к сепаратрисе. Поэтому наряду с изучением устойчивости колебательного движения необходимо проводить исследование устойчивости положения равновесия в области устойчивых резонансов.

Рассмотрим систему (4.31), которая описывает движение тела при резонансе (4.6), в малой окрестности устойчивого положения равновесия  $\chi^*$ . Преобразуем эту систему к виду, удобному для проведения исследования устойчивости по Ляпунову. Сделаем замену переменных в окрестности устойчивой стационарной точки:  $\chi = \chi^* + \Delta\chi$ ,  $\rho = \rho^* + \Delta\rho$  ( $\rho = d\chi/d\tau$ ,  $\rho^* = 0$ ) и разложим функцию  $Q(\chi, z)$  в точке  $\chi = \chi^*$  в ряд Тейлора по переменной  $z$ . В результате, пренебрегая членами порядка  $\mu^2$ , получим [4], [26]

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta\chi}{d\tau} &= \Delta\rho + \mu G(\chi^*, z), & \frac{d\Delta\rho}{d\tau} &= -\Omega^2(\chi^*, z)\Delta\chi + \mu P(\chi^*, z), \\ & & \frac{dz}{d\tau} &= \mu f_z(\chi^*, z), \end{aligned} \quad (4.43)$$

где

$$G(\chi^*, z) = - \left( \frac{\partial Q}{\partial z} / \frac{\partial Q}{\partial \chi} \right) \Big|_{\chi=\chi^*} f_z(\chi^*, z); \quad \Omega^2(\chi^*, z) = \frac{\partial^2 Q}{\partial \chi^2} \Big|_{\chi=\chi^*} > 0$$

в силу условия (4.38),  $P(\chi^*, z)$  — функция, зависящая от нелинейных членов разложения.

Для построения функции Ляпунова в квазилинейной системе (4.43) удобно перейти к переменным амплитуда-фаза

$$\Delta\chi = A \cos \psi, \quad \Delta\rho = -A\Omega \sin \psi, \quad (4.44)$$

где  $A$  и  $\psi$  — амплитуда и фаза колебаний переменной  $\Delta\chi$  относительно положения равновесия  $\chi = \chi^*$ . В этом случае система (4.43) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{d\tau} &= \Omega - \frac{\Omega'}{\Omega} \sin \psi \cos \psi + \mu \left( -\frac{P}{A\Omega} \cos \psi - \frac{G}{A} \sin \psi \right), \\ \frac{dA}{d\tau} &= -A \frac{\Omega'}{\Omega} \sin^2 \psi + \mu \left( -\frac{P}{\Omega} \sin \psi + G \cos \psi \right), & \frac{dz}{d\tau} &= \mu f_z, \end{aligned} \quad (4.45)$$

где  $\Omega' = d\Omega/d\tau$  имеет порядок малости  $\mu$ .

В качестве функции Ляпунова выбираем квадратичную форму амплитуды  $A$ , которая в силу (4.44) определяется формулой

$$V = A^2 = (\Delta\chi)^2 + \frac{(\Delta\rho)^2}{\Omega^2}. \quad (4.46)$$

Эта функция является положительно-определённой и допускает по переменным  $\Delta\chi$  и  $\Delta\rho$  бесконечно-малый высший предел и удовлетворяет всем требованиям теоремы 3, сформулированной в §1.2 [39], согласно которой, для устойчивости движения системы (4.45) в окрестности положения равновесия ( $\Delta\chi = 0$ ,  $\Delta\rho = 0$ ) при действии возмущений достаточно потребовать выполнения следующего условия:

$$2A \left\langle \frac{dA}{d\tau} \right\rangle < -\delta_2, \quad (4.47)$$

где  $\delta_2$  — некоторая положительная константа,  $\langle \dots \rangle$  — оператор усреднения по  $\psi$ .

Усреднение второго уравнения системы (4.45) по переменной  $\psi$  в окрестности точки  $\Delta\chi = 0$  позволяет переписать достаточное условие устойчивости движения в окрестности стационарной точки (4.47) в виде

$$\frac{\Omega'}{\Omega} > \delta_2. \quad (4.48)$$

Продифференцируем по времени  $\tau$  выражение для частоты  $\Omega^2 = \left( \frac{\partial Q}{\partial \chi} \right) \Big|_{\chi=\chi^*}$ , в результате получим

$$2\Omega \frac{d\Omega}{d\tau} = \left( \frac{\partial^2 Q}{\partial \chi \partial z} \frac{dz}{d\tau} + \frac{\partial^2 Q}{\partial \chi^2} \frac{d\chi^*}{d\tau} \right) \Big|_{\chi=\chi^*}. \quad (4.49)$$

Для отыскания производной  $d\chi^*/d\tau$  следует продифференцировать уравнение (4.36),  $Q(\chi^*, z) = 0$ , по времени  $\tau$  с учётом возмущённой системы (4.31):

$$\frac{d\chi^*}{d\tau} = -\mu \left( \frac{\partial Q}{\partial z} / \frac{\partial Q}{\partial \chi} \right) \Big|_{\chi=\chi^*} f_z(\chi^*, z).$$

Подставим это выражение в соотношение (4.49), и полученный результат подставим в условие (4.48). В результате получим окончательную форму достаточного условия устойчивости дви-

жения возмущённой системы в окрестности положения равновесия  $\chi = \chi^*$  в следующем виде:

$$\left( \mu \frac{\partial^2 Q}{\partial \chi \partial z} - \mu \frac{\partial^2 Q}{\partial \chi^2} \frac{\partial Q / \partial z}{\partial Q / \partial \chi} \right) \Big|_{\chi=\chi^*} f_z(\chi^*, z) > \delta_2. \quad (4.50)$$

Здесь функция  $Q(\chi, z)$  определяется формулой (4.32) и в конечном итоге параметрами исходной системы уравнений движения тела.

Принципиальное отличие представленных результатов от результатов работы [26] заключается в том, что здесь в качестве исходной системы использовалась полная нелинейная система уравнений движения, а линейризация производилась только в окрестности стационарной точки. В работе [26] рассматривались исходные линейризованные движения, а затем линейризация производилась ещё и в окрестности точки устойчивого положения равновесия. Покажем, что достаточное условие (4.50) обобщает аналогичное условие из работы [26]. Учитывая, что  $z = (\alpha_{\max}, q, R, G)$ , представим (4.50) в виде

$$\begin{aligned} & \left( \mu \frac{\partial^2 Q}{\partial \chi \partial \alpha_{\max}} - \mu \frac{\partial^2 Q}{\partial \chi^2} \frac{\partial Q / \partial \alpha_{\max}}{\partial Q / \partial \chi} \right) \Big|_{\chi=\chi^*} f_{\alpha_{\max}}(\chi^*, z) + \\ & + \left( \mu \frac{\partial^2 Q}{\partial \chi \partial q} - \mu \frac{\partial^2 Q}{\partial \chi^2} \frac{\partial Q / \partial q}{\partial Q / \partial \chi} \right) \Big|_{\chi=\chi^*} f_q(\chi^*, z) + \\ & + \left( \mu \frac{\partial^2 Q}{\partial \chi \partial R} - \mu \frac{\partial^2 Q}{\partial \chi^2} \frac{\partial Q / \partial R}{\partial Q / \partial \chi} \right) \Big|_{\chi=\chi^*} f_R(\chi^*, z) + \\ & + \left( \mu \frac{\partial^2 Q}{\partial \chi \partial G} - \mu \frac{\partial^2 Q}{\partial \chi^2} \frac{\partial Q / \partial G}{\partial Q / \partial \chi} \right) \Big|_{\chi=\chi^*} f_G(\chi^*, z) > \delta_2. \quad (4.51) \end{aligned}$$

Введём следующие допущения из [26]. Во-первых, второй член в условии (4.51), учитывающий изменение скоростного напора  $q$ , слабо зависит от возмущений и для данного тела есть вполне постоянная величина. Во-вторых, влияние третьего и четвёртого слагаемых на резонансное движение незначительно, и условие устойчивости обеспечивается достаточно большим значением  $f_{\alpha_{\max}}(\chi^*, z)$ .

С учётом принятых допущений, достаточное условие (4.51) можно переписать следующим образом:

$$\left( \mu \frac{\partial^2 Q}{\partial \chi \partial \alpha_{\max}} - \mu \frac{\partial^2 Q}{\partial \chi^2} \frac{\partial Q / \partial \alpha_{\max}}{\partial Q / \partial \chi} \right) \Big|_{\chi=\chi^*} f_{\alpha_{\max}}(\chi^*, z) > C_1, \quad (4.52)$$

где  $C_1$  — некоторая положительная величина, определяемая из условия

$$abs \left\{ - \left( \mu \frac{\partial^2 Q}{\partial \chi \partial q} - \mu \frac{\partial^2 Q}{\partial \chi^2} \frac{\partial Q / \partial q}{\partial Q / \partial \chi} \right) \Big|_{\chi=\chi^*} f_q(\chi^*, z) - \right. \\ \left. - \left( \mu \frac{\partial^2 Q}{\partial \chi \partial R} - \mu \frac{\partial^2 Q}{\partial \chi^2} \frac{\partial Q / \partial R}{\partial Q / \partial \chi} \right) \Big|_{\chi=\chi^*} f_R(\chi^*, z) - \right. \\ \left. - \left( \mu \frac{\partial^2 Q}{\partial \chi \partial G} - \mu \frac{\partial^2 Q}{\partial \chi^2} \frac{\partial Q / \partial G}{\partial Q / \partial \chi} \right) \Big|_{\chi=\chi^*} f_G(\chi^*, z) \right\} < C_1.$$

Полагая, что для малых углов атаки

$$f_{\alpha_{\max}}(\chi^*, z) = \frac{da_1(\chi^*, z)}{d\tau},$$

где  $a_1$  — угол между продольной осью тела и вектором кинетического момента, представим формулу (4.52) в виде

$$\frac{da_1(\chi^*, z)}{d\tau} > C^*, \tag{4.53}$$

где

$$C^* = \frac{C_1}{\left( \mu \frac{\partial^2 Q}{\partial \chi \partial \alpha_{\max}} - \mu \frac{\partial^2 Q}{\partial \chi^2} \frac{\partial Q / \partial \alpha_{\max}}{\partial Q / \partial \chi} \right) \Big|_{\chi=\chi^*}}.$$

Условие (4.53) совпадает с достаточным условием устойчивости для квазилинейного случая движения, приведённым в [26].

Рассмотрим движение тела с массово-геометрическими параметрами:  $M = 200$  кг,  $J_x = 0,4$ ,  $S = 0,4$  м<sup>2</sup>,  $l = 0,7$  м,  $\bar{x}_T = 0,05$ ,  $\bar{z}_T = 0,002$ ; при следующих начальных условиях:  $\alpha_0 = 47^\circ$ ,  $\varphi_0 = 0^\circ$ ,  $R_0 = 4,18$  с<sup>-1</sup>,  $G_0 = 2,96$  с<sup>-1</sup>,  $h_0 = 60$  км,  $V_0 = 4,8$  км/с,  $\vartheta_0 = -7^\circ$ .

На рис. 4.9 показано изменение частот колебаний  $\omega(z)$  и  $\lambda(z)$  во времени  $t$ . В окрестностях точек  $t_1$ ,  $t_2$ , (главный вращательный резонанс:  $m = n = 1$ ) и  $t_3$  (резонанс крена:  $m = 0$ ,  $n = 1$ ) тело захватывается в резонанс. Фазовые траектории, а также начальное и конечное положения сепаратрисы для всех трёх резонансов показаны соответственно на рис. 4.10 *а*, *б*, *в*. На рисунках тонкой сплошной линией изображена фазовая траектория тела. Толстой штриховой линией показано положение сепаратрисы в начальный момент времени, соответствующий захвату в резонанс. Толстой сплошной линией изображено конечное положение сепаратрисы. В моменты времени  $t_1$ ,  $t_2$ , и  $t_3$  вычислялось до-

статочное условие устойчивости резонанса (4.42) и достаточное условие устойчивости по Ляпунову (4.50).

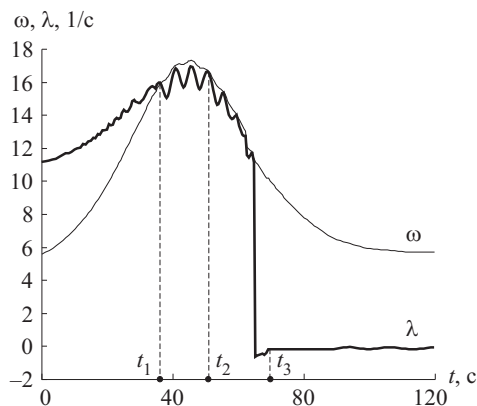


Рис. 4.9. Изменение частот колебаний во времени

В точке  $t_1$  достаточное условие устойчивости по Ляпунову (4.50) является истинным, однако не выполняется условие устойчивости резонанса (4.42). Это означает, что с течением времени колебательная область сжимается, и фазовая траектория «выталкивается» во вращательную область (рис. 4.10 а). Такой резонансный режим движения неустойчив.

В момент времени  $t_2$  достаточное условие (4.50) не выполняется, а условие (4.42) является истинным. Как видно из рис. 4.10 б, с течением времени фазовая траектория покидает малую окрестность положения равновесия, но остаётся внутри сепаратрисы в пределах области колебательного движения. При этом тело совершает колебания с возрастающей амплитудой. Такой резонансный режим движения устойчив.

В точке  $t_3$  одновременно выполняется оба условия (4.42) и (4.50). Это означает, что колебательная область расширяется, а фазовая траектория попадает в малую окрестность положения равновесия (рис. 4.10 в). В этом случае тело совершает затухающие колебания. Такой резонансный режим движения устойчив и устойчиво движение системы по Ляпунову в малой окрестности положения равновесия.

Проведённые расчёты показывают, что при анализе нелинейных резонансов следует проводить исследование устойчивости как самого резонанса, так и устойчивости по Ляпунову в окрестности положения равновесия, поскольку из устойчивости

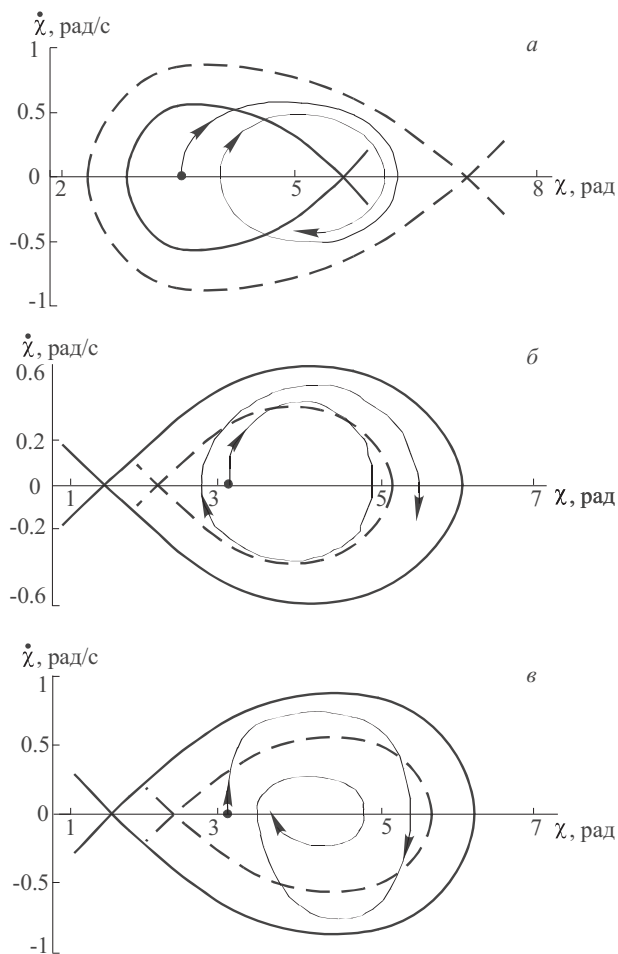


Рис. 4.10. Виды устойчивости резонансного движения аппарата

резонанса не следует устойчивости по Ляпунову и наоборот (рис. 4.10а и 3.10б).

На рис. 4.11, 4.12 представлены зависимости пространственного угла атаки  $\alpha$  и модуля угловой скорости вращения  $\omega_x$  от высоты полёта для всех четырёх случаев резонансного движения летательного аппарата в атмосфере.

Из рисунков видно, что одновременное выполнение условия устойчивости резонанса (4.42) и условия устойчивости по Ляпунову (4.50) приводит к значительному увеличению амплитуды

колебаний пространственного угла атаки и уменьшению угловой скорости вращения (первый случай).

При реализации второго случая, когда выполняется условие устойчивости резонанса (4.42) и не выполняется условие устойчивости по Ляпунову (4.50), искажение параметров траектории менее значительны. При этом наблюдается некоторое уменьшение амплитуды колебаний угла  $\alpha$  и увеличение угловой скорости  $\omega_x$ .

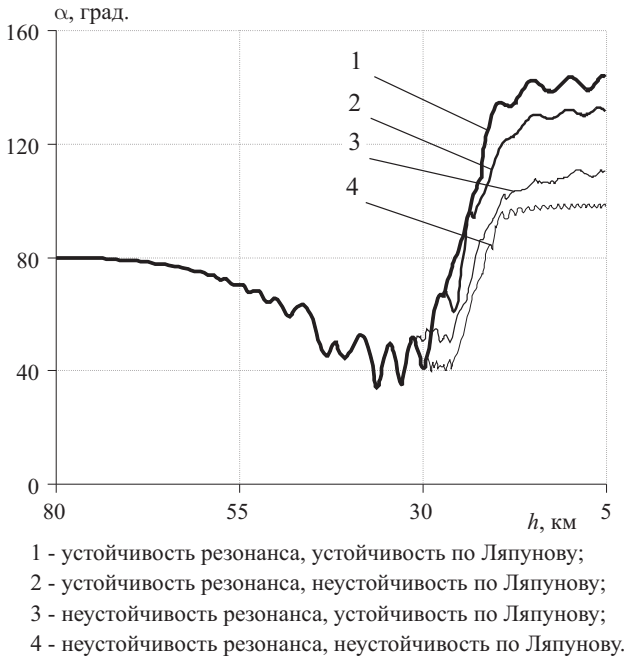
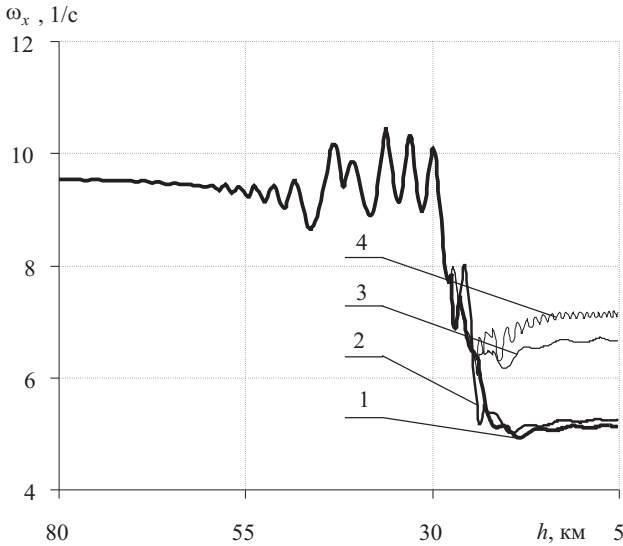


Рис. 4.11. Зависимость пространственного угла атаки от высоты полёта

В третьем случае невыполнение условия устойчивости резонанса (4.42) приводит к «выталкиванию» фазовой траектории в область вращательного движения, и резонансный режим движения разрушается. Четвёртый случай характеризуется наименьшими из всех случаев конечными значениями угла атаки и наибольшими значениями угловой скорости вращения.

Проведённые расчёты показывают, что наиболее опасным резонансным режимом движения тела в атмосфере является случай, когда выполняются условие устойчивости резонанса и условие устойчивости движения в малой окрестности положения равновесия.





- 1 - устойчивость резонанса, устойчивость по Ляпунову;
- 2 - устойчивость резонанса, неустойчивость по Ляпунову;
- 3 - неустойчивость резонанса, устойчивость по Ляпунову;
- 4 - неустойчивость резонанса, неустойчивость по Ляпунову

Рис. 4.12. Зависимость угловой скорости вращения от высоты полёта

#### 4.7. Анализ влияния нелинейных резонансов на параметры движения тела при спуске в атмосфере

Резонансные режимы движения, возникающие при спуске тела в атмосфере, приводят к значительным отклонениям параметров траектории от номинальных (нерезонансных) значений. Анализ возмущённого движения тела с малой инерционно-аэродинамической асимметрией, очевидно, следует проводить на основе исследования резонансных режимов. Наибольшее влияние на движение тела оказывают, как правило, резонансы низких порядков: резонанс крена и главный вращательный резонанс. Отклонение параметров траектории от номинальных значений, в частности пространственного угла атаки и угловой скорости крена  $\omega_x$ , может исключить возможность нормального функционирования парашютной системы или привести к неравномерному обгару теплозащитного покрытия. Одной из важных является задача выбора сочетания геометрических и инерционно-массовых

характеристик, при котором обеспечивается наименьшее влияние малой асимметрии на возмущённое движение тела.

В зависимости от длительности существования резонанса, различают три вида движения в окрестности резонанса: проход через резонанс, неустойчивый резонанс, устойчивый резонанс. Схема выбора проектно-баллистических параметров, рассмотренная в [10], основана на поиске области проектных переменных, в которой реализуется проход через резонанс, когда резонансное условие (4.6) выполняется кратковременно. Такая область может быть найдена из условия

$$\text{abs} \left( \frac{Q_0(\xi, z)}{\max_{\chi} Q - Q_0(\xi, z)} \right) > 1, \quad (4.54)$$

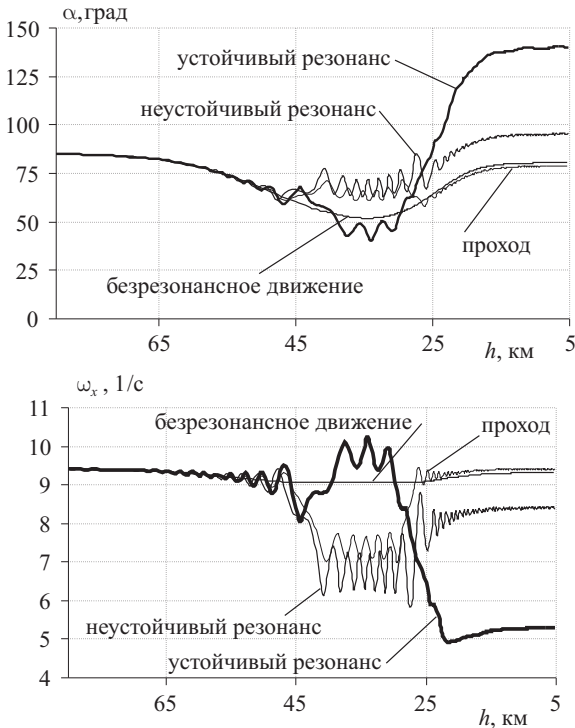


Рис. 4.13. Изменение пространственного угла атаки и угловой скорости крена при захвате в резонанс крена (сферический аппарат). Массово-геометрические параметры:  $M = 196$  кг,  $L = 0,7$  м,  $\bar{x}_T = 0,02$ ,  $\bar{z}_T = 0,001$ ,  $\bar{I}_x = 0,6$ . Начальные условия движения:  $\omega_0 = 9,41$  с<sup>-1</sup>,  $\alpha_0 = 85^\circ$ ,  $h_0 = 80$  км,  $V_0 = 7,8$  км/с,  $\vartheta_0 = -7^\circ$

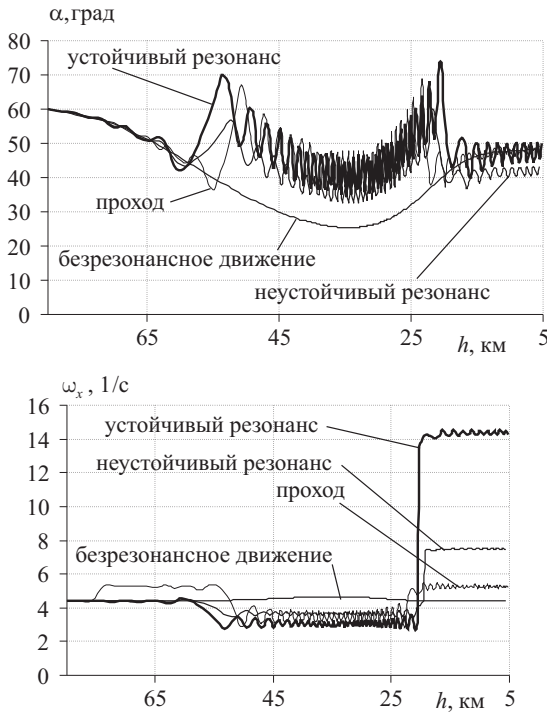


Рис. 4.14. Изменение пространственного угла атаки и угловой скорости крена при захвате в резонанс вращения (сферический аппарат). Массово-геометрические параметры:  $M = 196$  кг,  $L = 0,7$  м,  $\bar{x}_T = 0,02$ ,  $\bar{z}_T = 0,002$ ,  $\bar{I}_x = 0,5$ . Начальные условия движения:  $\omega_0 = 4,41$  с<sup>-1</sup>,  $\alpha_0 = 60^\circ$ ,  $h_0 = 85$  км,  $V_0 = 7,8$  км/с,  $\vartheta_0 = -7^\circ$

где  $\xi$  — пространство проектных переменных,

$$Q(\chi, \xi, z) = Q_0(\xi, z) + Q_1(\xi, z) \sin \chi + Q_2(\xi, z) \cos \chi + \\ + Q_3(\xi, z) \sin 2\chi + Q_4(\xi, z) \cos 2\chi.$$

При выполнении условия (4.54) кривая  $Q(\chi)$  не пересекает оси абсцисс (рис. 4.2), уравнение (4.36) не имеет корней, нет стационарных точек на фазовом портрете и нет области периодических движений в окрестности резонанса (4.6).

В соответствии с условием (4.54), к рассмотрению допускаются только траектории с проходом. Однако, если в практической задаче невозможно добиться удовлетворения условия (4.54), то можно провести анализ устойчивости резонансов. Если окажется, что реализуются только неустойчивые резонансы, то их

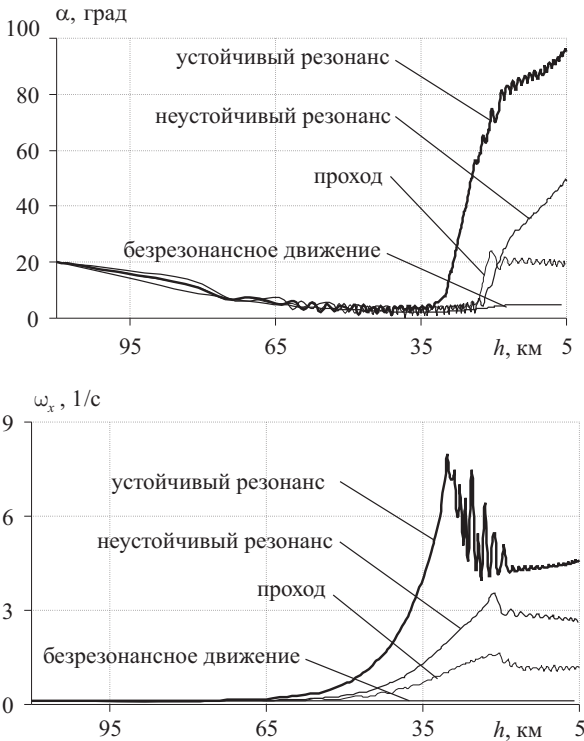


Рис. 4.15. Изменение пространственного угла атаки и угловой скорости крена при захвате в резонанс крена (конический аппарат). Массово-геометрические параметры:  $M = 200$  кг,  $L = 0,7$  м,  $\bar{x}_T = 0,02$ ,  $\bar{z}_T = 0,002$ ,  $\bar{I}_x = 0,6$ . Начальные условия движения:  $\omega_0 = 0,11 \text{ с}^{-1}$ ,  $\alpha_0 = 20^\circ$ ,  $h_0 = 110$  км,  $V_0 = 7,6$  км/с,  $\vartheta_0 = -3^\circ$

влияние не приведёт к значительным возмущениям параметров движения.

Покажем, что существование на траектории спуска неустойчивого резонанса не приводит к значительным возмущениям параметров траектории. На рис. 4.13–4.16 показаны законы изменения пространственного угла атаки  $\alpha$  и модуля угловой скорости  $\omega_x$  от высоты полёта сферического и конического аппаратов для безрезонансного режима движения, а также для трёх видов резонансного движения: проход через резонанс, устойчивый и неустойчивый резонанс. При проходе через резонанс не выполняется необходимое условие устойчивости (4.37). В случае неустойчивого резонанса необходимое условие (4.37) выполняется, а достаточное условие устойчивости резонанса (4.42) не выполняется. При устойчивом резонансе выполняются необходимое

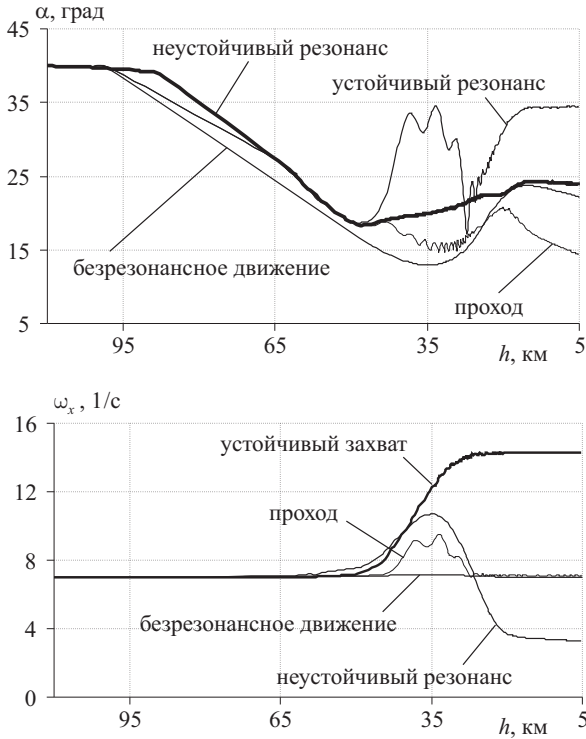


Рис. 4.16. Изменение пространственного угла атаки и угловой скорости крена при захвате в резонанс вращения (конический аппарат). Массово-геометрические параметры:  $M = 200$  кг,  $L = 0,7$  м,  $\bar{x}_T = 0,02$ ,  $\bar{z}_T = 0,001$ ,  $\bar{I}_x = 0,6$ . Начальные условия движения:  $\omega_0 = 7,01$  с $^{-1}$ ,  $\alpha_0 = 40^\circ$ ,  $h_0 = 110$  км,  $V_0 = 7,6$  км/с,  $\vartheta_0 = -3^\circ$

условие устойчивости (4.37), достаточное условие устойчивости резонанса (4.42) и достаточное условие устойчивости по Ляпунову (4.49). Под безрезонансным понимается режим движения, когда условие (4.6) не выполняется.

Из результатов расчётов, представленных на рисунках, следует, что характер изменения параметров траектории при проходе тела через резонанс близок к безрезонансному случаю движения. Захват аппарата в неустойчивый резонанс приводит к некоторому отклонению характеристик траектории от невозмущённых значений. Устойчивый резонанс, напротив, приводит к наибольшим искажениям параметров движения по сравнению с их нерезонансными значениями.

## Глава 5

# ИДЕНТИФИКАЦИЯ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИЗМЕРЕНИЯ

В главе рассматривается метод идентификации вращательного движения тела и его параметров по результатам измерений. Метод основан на использовании в критерии оптимальности оценивания первых интегралов движения или медленно меняющихся функций, зависящих от компонентов вектора измерений. На внеатмосферном участке траектории спуска измеряемыми параметрами являются компоненты вектора угловой скорости, а на атмосферном участке — компоненты вектора угловой скорости и компоненты вектора перегрузки. На внеатмосферном участке предлагается восстанавливать компоненты тензора инерции, а на атмосферном — аэродинамические характеристики тела. Предлагаемый интегральный метод оценивания инвариантен к величине шага и требует малого объёма вычислений за счёт использования интегралов движения или усреднённых уравнений. Приводятся результаты сравнительного численного анализа интегрального метода и метода наименьших квадратов (МНК).

### 5.1. Восстановление высокочастотного движения по малому числу измерений

Свободное движение тела вокруг центра масс отличается от поступательного движения наличием высокочастотных составляющих. Это обстоятельство существенно затрудняет решение измерительной задачи. При определении только самого вращательного движения используется приём, суть которого заключается в подстановке в правые части дифференциальных уравнений движения измеренных значений угловых скоростей и перегрузок с последующим их интегрированием [17]. Успешная реализация такого подхода возможна при условии, что частота измерений значительно больше частоты собственных колебаний тела, которая в процессе движения тела в плотных слоях атмосферы может достигать весьма больших значений. При решении общей задачи

идентификации методом наименьших квадратов, когда оцениваются характеристики тела и начальные условия его движения, в качестве критерия оптимальности используется квадратичная форма от разности измеренных и расчётных функций. В дальнейшем МНК будем называть также традиционным или общепринятым. Этот метод обладает высокой точностью, но имеет ряд недостатков, обусловленных особенностью данной задачи. Во-первых, требуется согласование по фазе измеренных и расчётных функций. Во-вторых, шаг измерения  $\Delta t$  должен быть существенно меньше периода колебания измеряемых функций. В-третьих, для реализации МНК необходимы большие затраты машинного времени из-за высокочастотного характера измеряемых функций.

Рассмотрим метод идентификации, лишённый недостатков МНК и близкий к нему по точности [3]. Пусть в моменты времени  $t_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) измеряются значения  $m$  функций

$$d = (d_1, d_2, \dots, d_m), \quad (5.1)$$

которым соответствуют следующие расчётные значения:

$$g(\zeta) = (g_1, g_2, \dots, g_m),$$

где  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_l)$  — вектор определяемых параметров. Согласно МНК в качестве оценки вектора состояния  $\xi$  применяется следующая:

$$\widehat{\xi} = \arg \min_{\zeta} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^m \lambda_j (d_{ij} - g_{ij}(\xi))^2, \quad (5.2)$$

где  $\lambda_j$  — весовые коэффициенты, показывающие относительную значимость измерений функций  $d$ .

Предположим, что известна совокупность независимых интегралов уравнений движения тела

$$H_k(\xi, d_j) = \text{const}, \quad (k = 1, 2, \dots, p; \quad j = 1, 2, \dots, m) \quad (5.3)$$

или медленно меняющихся функций вдоль решений этих уравнений

$$\frac{dH_k(\xi, d_j)}{dt} = O(\varepsilon), \quad (5.4)$$

где  $\varepsilon$  — малый параметр. Тогда, используя функции (5.3) или (5.4), можно записать новое выражение для оценки вектора со-

стояния:

$$\tilde{\xi} = \arg \min_{\xi} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^p \rho_k [H_k(\xi, d_{ij}) - H_k(\xi, g_{ij}(\xi))]^2, \quad (5.5)$$

где  $\rho_k$ -весовые коэффициенты,  $j = 1, 2, \dots, m$ .

Критерий оптимальности оценивания в случае (5.5) включает в себя только гладкие функции, поэтому шаг  $\Delta t$  может быть достаточно большим (поскольку шаг  $\Delta t$  не связан с периодом колебания измеряемых функций (5.1)) и согласования фаз измеряемых функций не требуется. Затраты машинного времени на решение задачи идентификации при этом существенно сокращаются, так как в случае (5.3) значение интеграла  $H_k$  вычисляется один раз для всего мерного интервала  $t_{\Sigma}$ , а в случае (5.4) уменьшение объёма вычислений достигается за счёт применения усреднённых уравнений движения. Если количество независимых функций  $H_k$  равно числу измерений в каждый момент времени  $t_i$ , то есть  $p = m$ , то точность интегрального метода будет соответствовать точности МНК. Если же это условие не выполняется и  $p < m$ , то точность интегрального метода будет ниже. Однако здесь надо учитывать следующие обстоятельства. Во-первых, есть случаи, когда не может быть обеспечена достаточная для МНК частота измерений. Например, при входе по крутой траектории в плотные слои атмосферы частота собственных колебаний тела, а следовательно и частоты колебаний измеряемых угловых скоростей и перегрузок могут достигать величин, превышающих частоту работы существующих измерительных систем. Тогда МНК, в отличие от интегрального метода, не даст сколько-нибудь достоверных результатов. Во-вторых, при  $p < m$  повышение точности оценивания по интегральному методу можно достичь путём увеличения мерного интервала  $t_{\Sigma}$ , что нельзя сделать при использовании традиционного метода, поскольку с ростом  $t_{\Sigma}$  увеличивается сдвиг фаз между измеренными и расчётными функциями.

## 5.2. Идентификация вращательного движения тела на орбитальном участке полёта

Рассмотрим движение тела вокруг центра масс на орбитальном участке полёта. Будем считать, что гравитационные и аэродинамические моменты, действующие на тело, пренебрежимо малы. Тогда движение тела относительно центра масс подчиня-



ется законам движения твёрдого тела около неподвижной точки в случае Эйлера–Пуансо [38]

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K} = 0, \quad (5.6)$$

где  $\boldsymbol{\omega}$  — вектор угловой скорости,  $\mathbf{K} = \|I\|\boldsymbol{\omega}$  — кинетический момент тела,  $\|I\|$  — тензор инерции тела.

Проекции вектора кинетического момента на оси связанной с телом системы координат  $OXYZ$  определяются формулами

$$\begin{aligned} K_x &= I_x\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z, \\ K_y &= -I_{yx}\omega_x + I_y\omega_y - I_{yz}\omega_z, \\ K_z &= -I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y + I_z\omega_z. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Тензор инерции в осях системы  $OXYZ$  имеет вид

$$\|I\| = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{bmatrix}.$$

Вектор состояния системы (5.6), с учётом симметрии тензора инерции относительно собственной главной диагонали, можно записать следующим образом:

$$\xi = (\omega_{x0}, \omega_{y0}, \omega_{z0}, I_x, I_y, I_z, I_{yx}, I_{xz}, I_{yz}), \quad (5.8)$$

где  $\omega_{x0}$ ,  $\omega_{y0}$ ,  $\omega_{z0}$  — начальные значения проекции вектора угловой скорости на связанные оси.

Пусть в моменты времени  $t_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) измеряются проекции вектора угловой скорости на оси системы  $OXYZ$

$$d = (\omega_x^u, \omega_y^u, \omega_z^u),$$

которым соответствуют расчётные значения

$$g(\xi) = (\omega_x^p, \omega_y^p, \omega_z^p).$$

Тогда в качестве оценки вектора состояния (5.8) по МНК принимается следующая (см. (5.2)):

$$\hat{\xi} = \arg \min_{\xi} \sum_{i=1}^N \sum_{j=x,y,z} \lambda_j (\omega_{ji}^u - \omega_{ji}^p(\xi))^2 \quad (5.9)$$

Для случая Эйлера–Пуансо известны три первые интеграла [38], зависящие от вектора угловой скорости и вектора состояния (5.8):

$$\frac{1}{2} (\omega_x K_x + \omega_y K_y + \omega_z K_z) = H_1, \quad (5.10)$$

$$K_x^2 + K_y^2 + K_z^2 = H_2, \quad (5.11)$$

$$K_x \gamma + K_y \gamma' + K_z \gamma'' = H_3,$$

где  $\gamma$ ,  $\gamma'$ ,  $\gamma''$  — направляющие косинусы, определяющие положение вектора кинетического момента. Однако при решении задачи оценивания с помощью интегрального метода можно воспользоваться только двумя первыми интегралами: интегралом энергии (5.10) и интегралом, определяющим модуль вектора кинетического момента (5.11). Третий интеграл, определяющий направление вектора кинетического момента, зависит от направляющих косинусов, которые в данной задаче не измеряются. Следовательно, число независимых интегралов ( $p = 2$ ) меньше количества измерений в точке  $t_i$  ( $m = 3$ ), поэтому априорно точность интегрального метода будет ниже, чем точность МНК.

В критерии оценивания (5.5) будем использовать первые интегралы (5.10) и (5.11):

$$\tilde{\xi} = \arg \min_{\xi} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^2 \rho_k [H_k(\xi, \omega_{ji}^u) - H_k(\xi, \omega_{ji}^p(\xi))]^2, \quad j = x, y, z. \quad (5.12)$$

Входящие в оценку (5.12) первые интегралы (5.10) и (5.11)

$$H_k^p = H_k(\xi, \omega_x^p, \omega_y^p, \omega_z^p), \quad k = 1, 2$$

сохраняют постоянные значения, поэтому в процессе решения задачи идентификации эти интегралы на всём мерном интервале  $t_{\Sigma}$  вычисляются только один раз, в первой точке  $i = 1$ . Это существенно снижает затраты машинного времени по сравнению с МНК, когда для получения расчётных значений вектора угловой скорости в точках измерения  $t_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) необходимо проводить численное интегрирование уравнений движения (5.6).

Рассмотрим пример. Пусть известны точные значения главных моментов инерции:

$$I_x^* = 1.500 \text{ кгм}^2, \quad I_y^* = 5.616 \text{ кгм}^2, \quad I_z^* = 5.880 \text{ кгм}^2.$$

Определим математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение оценок моментов инерции  $I_x$  и  $I_y$  с помощью МНК и интегрального метода. Величина мерного интервала принимает следующие значения: 2 с, 10 с, 25 с и 40 с, а число измерений на мерном интервале постоянно и равно  $N = 20$ . При  $t_{\Sigma} = 2$  с условие применимости МНК выполняется, то есть в этом случае шаг измерения  $\Delta t = t_{\Sigma}/(N - 1)$  существенно меньше периода собственных колебаний тела. Для каждого значения мерного интер-

вала  $t_{\Sigma}$   $K$ -раз ( $K = 50$ ) производилось моделирование  $N$  измерений с учётом ошибок, распределённых по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и среднеквадратическим отклонением  $\sigma_{\omega} = 0.01 \text{ с}^{-1}$ . Для получения оценок (5.9) и (5.12) использовался градиентный метод, и в качестве начальных значений принимались следующие:  $I_x^{\circ} = 1.8 \text{ кгм}^2$ ,  $I_y^{\circ} = 4.5 \text{ кгм}^2$ .

В табл. 5.1 приведены математические ожидания и среднеквадратические отклонения оценок моментов инерции  $I_x$  и  $I_y$ , найденные МНК и интегральным методом, для различных значений мерного интервала. Поскольку количество измерений на мерном интервале постоянно и равно 20, то с изменением величины мерного интервала  $t_{\Sigma}$  изменяется шаг измерения  $\Delta t = t_{\Sigma}/(N - 1)$ . На основании данных, представленных в табл. 5.1, можно сделать следующие выводы. Во-первых, при малом шаге измерений  $\Delta t \in (0.105 \text{ с}; 0.525 \text{ с})$  МНК по сравнению с интегральным методом, даёт более точные результаты — математические ожидания оценок ближе к точным значениям при меньших среднеквадратических отклонениях. Во-вторых, при достижении шага измерения значений, близких к периодам колебаний измеряемых угловых скоростей  $\Delta t = 25/(N - 1) = 1.316 \text{ с}$ , точность МНК существенно ухудшается, и при дальнейшем увеличении шага измерений ( $\Delta t = 40/(N - 1) = 2.105 \text{ с}$ ) МНК уже не даёт сколько-нибудь достоверных результатов. В-третьих, интегральный метод оценивания, независимо от величины шага измерения, позволяет получать достаточно точные результаты, и этот метод целесообразно использовать в случаях, когда МНК не даёт удовлетворительных результатов.

Для задач идентификации, кроме вопроса о точности оценок, весьма важен вопрос о затратах машинного времени, требуемого на получение оценок, тем более, что основным методом решения подобных задач является МНК. Затраты машинного времени при использовании МНК возрастают пропорционально увеличению мерного интервала, поскольку основной объём вычислений связан с численным интегрированием уравнений движения тела, проведение которого необходимо для получения расчётных значений составляющих вектора угловой скорости. Интегральный метод, напротив, не требует численного интегрирования уравнений движения, и объём вычислений не зависит от величины мерного интервала, а определяется только количеством точек, в которых надо вычислять первые интегралы (5.10) и (5.11). В рассмотренном примере использование интегрального метода даёт выигрыш в затратах машинного времени на 2–3 порядка по сравнению с МНК.

Таблица 5.1. Значения математических ожиданий и среднеквадратических отклонений оценок моментов инерции, полученные МНК и интегральным методом [3]

$t_{\Sigma}$	Метод наименьших квадратов				Интегральный метод			
	2	10	25	40	2	10	25	40
$M_{I_x}$	1.499	1.499	1.499	1.493	1.491	1.494	1.499	1.500
$\sigma_{I_x}$	0.011	0.009	0.437	0.571	0.082	0.063	0.092	0.074
$M_{I_y}$	5.627	5.619	6.477	7.007	5.604	5.604	5.612	5.605
$\sigma_{I_y}$	0.027	0.025	1.651	3.183	0.043	0.046	0.041	0.043

### 5.3. Идентификация вращательного движения тела при спуске в атмосфере

Рассмотрим неуправляемое движение осесимметричного тела относительно центра масс при спуске в атмосфере. Будем полагать, что параметры, определяющие поступательное движение тела, известны. Движение тела относительно центра масс при спуске в атмосфере описывается системой уравнений (3.1), которую представим в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 \ddot{\alpha} + F(\alpha, q, a) &= \varepsilon \Phi_{\alpha}(\alpha, \dot{\alpha}, R, G, q, a), \\
 \dot{R} &= \varepsilon \Phi_R(\alpha, R, G, q, a), \\
 \dot{G} &= \varepsilon \Phi_G(\alpha, \dot{\alpha}, R, G, q, a), \\
 \dot{q} &= \varepsilon \Phi_q(\alpha, R, G, q, a),
 \end{aligned}
 \tag{5.13}$$

где  $a$  — вектор параметров системы.

Тогда вектор состояния примет вид

$$\xi = (\alpha_0, \dot{\alpha}_0, R_0, G_0, a).
 \tag{5.14}$$

Пусть в моменты времени  $t_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) измеряются проекции векторов угловой скорости и перегрузки на оси связанной системы координат  $OXYZ$ :

$$d = (\omega_x, \omega_y, \omega_z, n_x, n_y, n_z).
 \tag{5.15}$$

Для решения задачи оценивания вектора состояния (5.14) необходимо найти совокупность независимых функций переменных (5.15), удовлетворяющих условиям (5.3) или (5.4). В невозмущённом движении ( $\varepsilon = 0$ ) система уравнений (5.13) описывает

движение твёрдого тела относительно неподвижной точки в случае Лагранжа, для которого имеют место три первых интеграла

$$R = \text{const}, \quad (5.16)$$

$$G = \text{const}, \quad (5.17)$$

$$\frac{\dot{\alpha}^2}{2} + W(\alpha) = E, \quad (5.18)$$

где

$$W(\alpha) = \int F(\alpha) d\alpha. \quad (5.19)$$

Из системы (5.13) непосредственно следует, что интегралы (5.16) и (5.17) являются медленно меняющимися функциями, то есть удовлетворяют условию (5.14). Покажем, что интеграл энергии (5.19) также медленно меняется во времени. Продифференцируем по времени интеграл энергии (5.18) в силу уравнений (5.13):

$$\frac{dE}{dt} = \dot{\alpha}(\ddot{\alpha} + F) + \varepsilon \frac{\partial W}{\partial z} \Phi_z = \varepsilon \left( \dot{\alpha} \Phi_\alpha + \frac{\partial W}{\partial z} \Phi_z \right), \quad (5.20)$$

где  $z = R, G, q$  — вектор медленно меняющихся функций. Уравнение (5.20) показывает, что производная интеграла энергии имеет порядок малости  $\varepsilon$ . Отсюда ясно, что для рассматриваемого случая существует совокупность трёх независимых медленно меняющихся функций

$$H_k = (R, G, E), \quad k = 1, 2, 3. \quad (5.21)$$

Поскольку первое уравнение исходной системы (5.13) не зависит явным образом от времени, то без нарушения общности можно принять, что в начальный момент времени производная  $\left. \frac{d\alpha}{dt} \right|_{t=0} = 0$ , а угол атаки равен амплитудному значению  $\alpha_0 = \alpha_{m0}$ . Тогда поведение системы (5.13) определяется тремя начальными условиями  $\alpha_{m0}, R_0, G_0$  при одном нулевом ( $\dot{\alpha}_0 = 0$ ), причём функции  $\alpha_m, R, G$  медленно меняются во времени. Следовательно, число независимых медленно меняющихся функций для системы (5.13) равно трём. Заметим, что амплитуда  $\alpha_m$  является корнем уравнения  $W(\alpha_m) - E = 0$ . Поэтому интеграл энергии (5.21) может быть заменён на амплитуду угла атаки или иную медленно переменную, например, интеграл действия.

Установим связь между медленно меняющимися функциями (5.21) и компонентами вектора измерений (5.15). Для системы координат  $OXYZ$  существуют следующие соотношения:

$$\sin \alpha = \frac{n_z}{n}, \quad \cos \alpha = \frac{n_x}{n}, \quad \sin \varphi = -\frac{n_z}{n_z}, \quad \cos \varphi = \frac{n_y}{n_z}, \quad (5.22)$$

где  $n = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$  — полная перегрузка,  $n_z = \sqrt{n_y^2 + n_z^2}$  — экваториальная перегрузка. Тогда, с учётом (1.27) и (1.28) можно записать формулы вида

$$\dot{\alpha} = \frac{\omega_x n_y - \omega_y n_x}{n_z}, \quad R = \bar{I}_x \omega_x, \quad G = \frac{1}{n} (\bar{I}_x \omega_x n_x - \omega_y n_y - \omega_z n_z). \quad (5.23)$$

Покажем, что интеграл энергии (5.18) может быть выражен через компоненты вектора измерений (5.15). Для восстанавливающего момента (2.5) потенциальная энергия (5.19) определяется формулой (2.9)

$$W(\alpha) = \frac{G^2 + R^2 - 2GR \cos \alpha}{2 \sin^2 \alpha} - q \sum_{i=0}^{n-1} \frac{c_i}{i+1} \cos^{i+1} \alpha.$$

Тогда, подставляя это соотношение, а также формулы (5.23) в выражение (5.18), представим интеграл энергии как функцию параметров измерений:

$$E = \frac{1}{2I} \left[ I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2 - q \sum_{i=0}^{n-1} \frac{c_i}{i+1} \left( \frac{n_x}{n} \right)^{i+1} \right]. \quad (5.24)$$

Это выражение с точностью до множителя определяет собой полную энергию вращательного движения осесимметричного тела в атмосфере. Таким образом, найдена совокупность трёх медленно меняющихся функций (5.21), зависящих от измерений (5.15).

Запишем выражения для оценок вектора состояния (5.14) по МНК (5.2)

$$\hat{\xi} = \arg \min_{\xi} \sum_{i=1}^N \sum_{j=x,y,z} [\lambda_{\omega_j} (\omega_{ji}^u - \omega_{ji}^p)^2 - \lambda_{n_j} (n_{ji}^u - n_{ji}^p)^2] \quad (5.25)$$

и по интегральному методу (5.12)

$$\tilde{\xi} = \arg \min_{\xi} \sum_{i=1}^N [\rho_R (R_i^u - R_i^p)^2 + \rho_G (G_i^u - G_i^p)^2 + \rho_E (E_i^u - E_i^p)^2]. \quad (5.26)$$

Особенностью возмущённого движения тела относительно центра масс является изменение собственной частоты колебания в процессе спуска в атмосфере. Частота колебания тела, а следовательно и частоты колебаний измеряемых угловых скоростей и перегрузок (5.15), изменяется пропорционально корню квадратному от скоростного напора. И если в начале траектории частоты колебаний невелики, то на участке траектории в окрестности точки, соответствующей максимальному скоростному напору, частоты колебаний могут достигать весьма больших величин. Чем круче траектория спуска, меньше баллистический коэффициент и больше запас статической устойчивости, тем больше частоты изменения измеряемых функций. В таких случаях получить оценку вектора состояния по МНК (5.25) весьма трудно, поскольку частота измерений должна на порядок превышать частоту колебаний самого тела. Такого ограничения не существует для интегрального метода, однако его точность ниже, чем точность метода наименьших квадратов, так как число независимых медленно меняющихся функций (5.21) в два раза меньше количества измерений в каждой точке  $t_i (i = 1, 2, \dots, N)$  — три против шести.

Рассмотрим вопрос о быстродействии интегрального метода. Система уравнений движения (5.13) содержит в своём решении высокочастотные составляющие, что затрудняет её численное интегрирование, а, следовательно, и получение расчётных значений угловых скоростей и перегрузок. Вместе с тем высокочастотный характер движения позволяет заменить систему (5.13) на усреднённую систему. Такие системы приведены в гл. 3.

Медленно меняющиеся функции (5.21), входящие в оценку (5.26), имеют колебательные составляющие порядка малости  $\varepsilon$ . Чтобы исключить согласование по фазе измеренных и расчётных значений этих функций, а также усреднить ошибки измерения и сократить затраты машинного времени на получение расчётных значений, целесообразно в оценке (5.26) использовать усреднённые значения функций (5.21), найденные в результате численного интегрирования усреднённых уравнений. Окончательно оценку состояния (5.14) по интегральному методу запишем следующим образом:

$$\tilde{\xi} = \arg \min_{\zeta} \sum_{i=1}^N \left[ \rho_R (R_i^u - \langle R_i^p \rangle)^2 + \rho_G (G_i^u - \langle G_i^p \rangle)^2 + \rho_E (E_i^u - \langle E_i^p \rangle)^2 \right], \quad (5.27)$$

где  $\langle R_i^p \rangle$ ,  $\langle G_i^p \rangle$ ,  $\langle E_i^p \rangle$  — решения усреднённых уравнений движения.

С целью подтверждения преимуществ интегрального метода для задач идентификации вращательного движения тела при спуске в атмосфере рассмотрим два примера: первый — в детерминированной постановке при «идеальных» измерениях, второй — в стохастической постановке при измерениях с «шумами».

Пример 1. Пусть тело сферической формы имеет следующие параметры:  $m_z^\alpha = -0.06$ ,  $\frac{I_x}{I} = 0.6$ ,  $\sigma_x = \frac{c_x S}{2M} = 0.001 \text{ м}^2 \text{ кг}^{-1}$ .

В качестве начальных условий приняты

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 90^\circ, & \dot{\alpha}_0 &= 0, & R_0 &= 2 \text{ с}^{-1}, & G &= 1 \text{ с}^{-1}, \\ \vartheta_0 &= -10^\circ, & V_0 &= 7000 \text{ м/с}^2, & h_0 &= 60000 \text{ м}. \end{aligned}$$

Путём численного интегрирования уравнений движения (1.30) проводилось численное моделирование измерений (5.15) по формулам

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\psi} \cos \alpha + \dot{\varphi}, & \omega_y &= -\dot{\psi} \sin \alpha \cos \varphi + \dot{\alpha} \sin \varphi, \\ \omega_z &= \dot{\psi} \sin \alpha \sin \varphi + \dot{\alpha} \cos \varphi, \\ n_x &= \frac{c_\tau q S}{M q}, & n_y &= \frac{c_n q S}{M q} \cos \varphi, & n_z &= -\frac{c_n q S}{M q} \sin \varphi. \end{aligned} \quad (5.28)$$

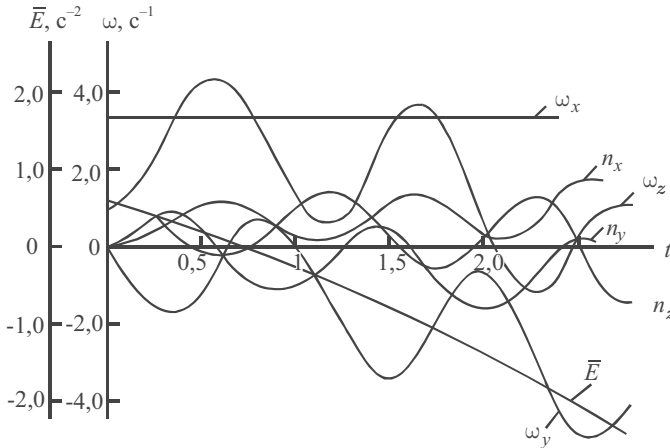


Рис. 5.1. Изменение во времени измеряемых функций  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$ ,  $n_x$ ,  $n_y$ ,  $n_z$  и среднего значения интеграла энергии



В точках  $t_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) вычислялись компоненты вектора измерений по формулам (5.28). На рис. 5.1 показано изменение во времени измеряемых функций (5.15) и среднего значения интеграла энергии (5.24), причём функции  $R$  и  $G$  при выбранных параметрах тела оставались постоянными, равными, соответственно, 2,0 и 1,0. Производилось оценивание производной коэффициента восстанавливающего момента по углу атаки  $m_z^\alpha$  на мерном интервале  $t_\Sigma = 20$  с. Период собственных колебаний тела приблизительно равнялся 1 с. Нахождение оценок (5.27) по интегральному методу осуществлялось методом Хука–Дживса [40]. В качестве начального приближения выбрано значение  $(m_z^\alpha)_0 = -0.045$ . При изменении шага интегрирования от 0.1 с до 5.0 с абсолютная погрешность оценивания изменялась от 0.001 до 0.004.

Пример 2. Проводилось сравнение интегрального метода и МНК при оценивании коэффициента  $m_z^\alpha$  с учётом ошибок измерения, распределённых по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и среднеквадратическим отклонением, равным, соответственно, для угловых скоростей и перегрузок:  $\sigma_\omega = 0.01 \text{ с}^{-1}$  и  $\sigma_n = 0.01$ . Точное значение оцениваемого параметра равно  $m_z^\alpha = -0.06$ , а начальное приближение —  $(m_z^\alpha)_0 = -0.1$ . Количество измерений на мерном интервале равно  $N = 20$ , изменялось только значение мерного интервала  $t_\Sigma$ , а следовательно, и шага измерения  $\Delta t = t_\Sigma / (N - 1)$ . На мерном интервале моделирование производилось  $K$  раз ( $K = 50$ ), при этом использовались различные совокупности псевдослучайных чисел, необходимых для формирования ошибок измерений. Период колебаний измеряемых функций на мерном интервале  $t_\Sigma = 16$  с изменялся от 0.3 секунд до 0.8 секунд. Рассматривались интервалы измерений  $t_\Sigma \in [0.2, 16]$  с, которым соответствовали шаги измерения  $\Delta t \in [0.011, 0.842]$  с.

В табл. 5.2 приведены математические ожидания и среднеквадратические отклонения оценок, полученных по МНК и интегральному методу, а также коэффициенты корреляции между этими оценками. При  $t_\Sigma$  равном 8 с и 16 с оценки по МНК расходятся и поэтому не приведены в таблице. Как и для внеатмосферного участка полёта метод наименьших квадратов даёт более точные оценки по сравнению с интегральным методом в случаях, когда шаг измерений существенно меньше периода колебаний измеряемых функций ( $\Delta t = 0.011$  с и  $\Delta t = 0.105$  с). Точность оценивания по интегральному методу практически не зависит от величины шага измерений, исключение составляет только случай  $\Delta t = 0.011$  с. За счёт использования усреднённых

уравнений при реализации интегрального метода объём вычислений сокращается на 2 порядка по сравнению с МНК.

Таблица 5.2. Значения математических ожиданий и среднеквадратических отклонений оценок  $m_z^\alpha$  и коэффициента корреляции между этими оценками, полученные МНК и интегральным методом [3]

$t_\Sigma, c$	0.2	2.0	4.0	8.0	16.0
$\Delta t, c$	0.011	0.105	0.221	0.421	0.842
$M_{\widehat{m}_z^\alpha}$	-0.0599	-0.0599	-0.0799	—	—
$\sigma_{\widehat{m}_z^\alpha}$	0.0006	0.0001	0.0306	—	—
$M_{\widehat{m}_z^\alpha}$	-0.0624	-0.0604	-0.0604	-0.0604	-0.0604
$\sigma_{\widehat{m}_z^\alpha}$	0.0033	0.0011	0.0011	0.0010	0.0012
$K_{\widehat{m}_z^\alpha \widehat{m}_z^\alpha}$	0.5264	0.6579	0.0696	—	—

В заключительной части этой главы следует ответить на два вопроса.

Первый вопрос. Почему в книге, посвящённой исследованию движения тела в атмосфере, рассматривается задача идентификации вращательного движения аппарата на внеатмосферном участке полёта? Вектор состояния в задаче спуска включает в себя характеристики тела и начальные условия движения и имеет весьма большую размерность. Понизить размерность можно только, произведя декомпозицию задачи. Представим вектор состояния следующим образом:

$$d = (a_I, a_A, z_0),$$

где  $a_I$  — вектор инерционных характеристик тела (компоненты тензора инерции),  $a_A$  — вектор аэродинамических характеристик тела (коэффициенты аэродинамических сил и моментов),  $z_0$  — начальные условия движения. На орбитальном участке полёта тела аэродинамические силы и моменты пренебрежимо малы, и вектор состояния можно представить в виде

$$d_{\text{orb}} = (a_I, z_0).$$

После того как будут оценены компоненты тензора инерции и начальные условия движения, остаётся определить на атмосферном участке только аэродинамические характеристики

$$d_{\text{атм}} = (a_A).$$

И ещё одно обстоятельство позволило рассматривать орбитальный участок полёта. Интегральный метод первоначально разрабатывался для восстановления характеристик тела при спуске

в атмосфере. Однако этот метод оказался эффективным и ещё более наглядным для орбитального участка полёта.

Второй вопрос. Почему рассматривается движение только осесимметричного тела в атмосфере? При малой асимметрии могут реализовываться два случая движения: нерезонансный и резонансный. В нерезонансном — асимметрия не оказывает влияние на вращательное движение тела, поэтому в этом случае применим интегральный метод. При резонансе, особенно при устойчивом резонансе, функции (5.21) могут существенно изменять своё значение, что исключает возможность применения их для оценивания вектора состояния. Отсюда ясно, что интегральный метод оценивания целесообразно использовать либо на верхней части атмосферного движения до наступления резонансов, либо на конечном участке, после прохождения резонансов.

## Список литературы

1. *Андреевский В.В.* Динамика спуска космических аппаратов на Землю. — М.: Машиностроение, 1970. — 232 с.
2. *Архангельский Ю.А.* Аналитическая динамика твердого тела. — М.: Наука, 1977. — 328 с.
3. *Асланов В.С.* Определение вращательного движения КА по результатам измерений // Космич. исслед. 1989. Т. 27, № 3. С. 323–332.
4. *Асланов В.С., Мясников С.В.* Анализ нелинейных резонансов при спуске космического аппарата в атмосферу // Космич. исслед. 1997. Т. 35, № 6. С. 659–665.
5. *Асланов В.С., Мясников С.В.* Устойчивость нелинейных резонансных режимов движения космического аппарата в атмосфере // Космич. исслед. 1996. Т. 34, № 4. С. 626–631.
6. *Асланов В.С., Серов В.М.* Вращательное движение осесимметричного твердого тела с бигармонической характеристикой восстанавливающего момента // Изв. АН СССР. МТТ. 1995. № 3. С. 19–25.
7. *Асланов В.С., Тимбай И.А.* Интеграл действия при движении твердого тела в обобщенном случае Лагранжа // Изв. АН. МТТ. 1998. № 2. С. 917.
8. *Асланов В.С., Тимбай И.А.* Некоторые задачи динамики неуправляемого спуска КА в атмосфере // Космич. исслед. 1995. Т. 33, № 6. С. 639–645.
9. *Асланов В.С.* Два вида нелинейного резонансного движения асимметричного КА в атмосфере // Космич. исслед. 1988. Т. 26, № 2. С. 220–226.
10. *Асланов В.С.* Нелинейные резонансы при неуправляемом спуске в атмосфере асимметричных КА // Космич. исслед. 1992. Т. 30, № 2. С. 608–614.
11. *Асланов В.С.* О вращательном движении баллистического осесимметричного аппарата при спуске в атмосферу // Космич. исслед. 1976. Т. 14, № 4. С. 491–497.
12. *Асланов В.С.* Определение амплитуды пространственных колебаний баллистического аппарата с малой асимметрией при спуске в атмосферу // Космич. исслед. 1980. Т. 18, № 2. С. 178–184.
13. *Асланов В.С., Бойко В.В.* Нелинейное резонансное движение асимметричного космического аппарата в атмосфере // Космич. исслед. 1985. Т. 23, № 3. С. 408–417.
14. *Асланов В.С., Тимбай И.А., Бойко В.В.* Пространственные колебания осесимметричного аппарата на произвольных углах атаки при снижении в атмосфере планеты // Космич. исслед. 1981. Т. 19, № 5. С. 680–687.
15. *Аэродинамика ракет / под ред. Краснова Н.Ф.* — М.: Высшая школа, 1968. — 630 с.
16. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1974. — 504 с.
17. *Брандин В.Н., Васильев А.А., Куницкий А.А.* Экспериментальная баллистика космических аппаратов. — М.: Машиностроение, 1984. — 262с.

18. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. — М.: Наука, 1980. — 974 с.
19. *Бухгольц Н.Н.* Основной курс теоретической механики. Ч. II. — М.: Гостехиздат, 1945. — 248 с.
20. *Бюшгенс Г.С., Студнев Р.В.* Динамика пространственного движения самолета. — М.: Машиностроение, 1976. — 226 с.
21. *Волосов В.М., Моргунов Б.И.* Метод усреднения в теории нелинейных колебательных систем. — М.: Изд. МГУ, 1971. — 508 с.
22. *Волосов В.М.* Некоторые виды расчетов в теории нелинейных колебаний, связанных с усреднением // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1963. Т. 3, № 1. С. 3–53.
23. *Гантмахер Ф.Р., Левин Л.М.* Теория полета неуправляемых ракет. — М.: Физматгиз, 1959. — 360 с.
24. *Двайт Г.Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы. — М.: Наука, 1973. — 228 с.
25. *Дмитриевский А.А., Лысенко Л.Н., Богодистов С.С.* Внешняя баллистика. — М.: Машиностроение, 1991. — 638 с.
26. *Заболотнов Ю.М.* Асимптотический анализ квазилинейных уравнений движения в атмосфере КА с малой асимметрией. 3 // Космические исследования. 1994. Т. 32, вып. 4–5. С. 112–125.
27. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1984. — 720 с.
28. *Костров А.В.* Движение асимметричных баллистических аппаратов. — М.: Машиностроение, 1984. — 271 с.
29. *Кузмак Г.Е.* Динамика неуправляемого движения летательных аппаратов при входе в атмосферу. — М.: Наука, 1970. — 348 с.
30. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика. — М.: Наука, 1988. — 208 с.
31. *Мартынов А.К.* Прикладная аэродинамика. — М.: Машиностроение, 1972. — 448 с.
32. *Моисеев Н.Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. — М.: Наука, 1981. — 380 с.
33. *Найфе А., Сарик В.* Исследование асимметричных вращающихся тел с нелинейными аэродинамическими характеристиками // Ракетная техника и космонавтика. 1972. № 8. С. 38.
34. *Нейштадт А.И.* Вопросы теории возмущений нелинейных резонансных систем // Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. — М.: ВИНТИ, 1988. — 362 с.
35. *Постиков А.Г., Чуйко В.С.* Внешняя баллистика неуправляемых авиационных ракет и снарядов. — М.: Машиностроение, 1985. — 248 с.
36. *Серов В.М.* Вращательное движение динамически симметричного твердого тела под действием нелинейного момента // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 5. С. 26–31.
37. Справочник по специальным функциям / Под. ред. М. Абрамовица, И. Стигана. — М.: Наука, 1979. — 830 с.
38. *Суслов Г.К.* Теоретическая механика. — М.: Гостехиздат, 1944. — 655 с.
39. *Хапаев М.М.* Асимптотические методы и устойчивость в теории нелинейных колебаний. — М.: Высшая школа, 1988. — 184 с.
40. *Химмельблау Д.* Прикладное нелинейное программирование. — М.: Мир, 1975. — 534 с.

41. Шилов А.А., Васильев А.Ф. Динамическая устойчивость пространственного движения летательных аппаратов на больших углах атаки при некоторых видах инерционно-аэродинамической асимметрии // Труды ЦАГИ. 1971. вып. 1345. С. 68.
42. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. — М.: Наука, 1977. — 344 с.
43. Ярошевский В.А. Движение неуправляемого тела в атмосфере. — М.: Машиностроение, 1978. — 167 с.
44. Platus D.H. Angle-of-Attack Convergence and Windward-Meridian Rotation Rate of Rolling Re-Entry Vehicles // AIAA Journal. V. 7, № 12. Dec., 1969. P. 2324–2330.
45. Platus D.H. Ballistic re-entry vehicle flight dynamics // Journ. Guidance, Control and Dynamics. 1982. V. 5, № 1.
46. Price D.A. Jr. Sources, Mechanisms and Control of Roll Resonance Phenomena for Sounding Rockets // AIAA Journ. of Spacecraft and Rockets. V. 4, № 11. Nov., 1967.

